



PERBANDINGAN BAGAN KENDALI MULTIVARIAT *SHORT-RUN \tilde{F}_m DENGAN V_m*

DARMANTO
NRP 1312 201 207

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Muhammad Mashuri, MT.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017



THESIS - SS142501

**COMPARISON SHORT-RUN MULTIVARIATE \tilde{F}_m
AND V_m CONTROL CHART**

DARMANTO

NRP. 1312 201 207

SUPERVISOR

Dr. Muhammad Mashuri, MT.

MAGISTER PROGRAM

DEPARTMENT OF STATISTICS

FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2017

**PERBANDINGAN BAGAN KENDALI MULTIVARIAT
*SHORT-RUN \tilde{F}_m DENGAN V_m***

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)

di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

DARMANTO
NRP. 1312 201 207

Tanggal Ujian : 11 Januari 2017
Periode Wisuda : Maret 2017

Disetujui oleh:



Dr. Muhammad Mashuri, MT.
NIP. 19620408 198701 1 001

(Pembimbing)



Dr. Agus Suharsono, MS
NIP. 19580823 198403 1 003

(Penguji I)



Dr. Santi Wulan Purnami, M.Si.
NIP. 19720923 199803 2 001

(Penguji II)

an. Di



Prof. Dr. Ir. Djaubar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

Direktur Program Pascasarjana,

Prof. Ir. Djaubar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

PERBANDINGAN BAGAN KENDALI MULTIVARIAT *SHORT-RUN \tilde{F}_m DENGAN V_m*

Nama Mahasiswa : Darmanto
NRP : 1312 201 207
Pembimbing : Dr. Muhammad Mashuri, MT.

ABSTRAK

Proses produksi *short-run* didefinisikan sebagai suatu keadaan produksi di mana antar produksi yang satu dengan yang lain mempunyai standar karakteristik kualitas yang berbeda-beda (*job shop*), *just-in-time* (JIT) yakni jumlah produk yang sedikit (*low volume*, umumnya kurang dari 50 item) sehingga proses produksi berjalan lebih pendek (*short*) dan parameter proses tidak tersedia dikarenakan tidak cukup atau tidak ada data produksi sebelumnya. Untuk mengatasi hal tersebut diusulkan beberapa bagan kendali multivariat *short-run*, dua di antaranya adalah Scholz-Tosch (1994) yang melambangkan statistik bagan kendalinya dengan \tilde{F}_m dan Khoo-Quah (2002) yang melambangkan statistik bagan kendalinya dengan V_m . Kedua bagan kendali tersebut menggunakan konsep *successive difference* (SD) dan berada di bawah asumsi normal multivariat. Selanjutnya, dibandingkan kedua bagan kendali tersebut dengan mengevaluasi metode secara teoritis dan kinerja keduanya dengan menggunakan *Average Run Length* (ARL_1). Selain itu, diberikan data contoh sebagai terapan bagi kedua bagan kendali. Secara metode, statistik \tilde{F}_m hanya menggunakan konsep SD untuk estimasi matriks kovarians sehingga bagan kendali tidak segera terbentuk setelah beberapa data diperoleh, sedangkan statistik V_m , menggunakan konsep SD untuk mengestimasi kedua parameter sehingga bagan kendali segera terbentuk setelah beberapa data diperoleh. Berdasarkan nilai ARL_1 , pada kondisi kedua parameter diketahui, bagan kendali \tilde{F}_m mempunyai sensitifitas yang lebih tinggi dibandingkan dengan bagan kendali V_m . Namun demikian, pada kondisi kedua parameter tidak diketahui, bagan kendali V_m lebih sensitif dalam mendeteksi adanya pergeseran vektor rata-rata proses dibanding bagan kendali \tilde{F}_m .

Kata kunci: ARL_1 , *job shop*, *just in time*, *short-run*, *successive difference*

COMPARISON SHORT-RUN MULTIVARIATE \tilde{F}_m AND V_m CONTROL CHART

By : Darmanto
NRP : 1312 201 207
Supervisor : Dr. Muhammad Mashuri, MT.

ABSTRACT

The term short-runs production is the run processs is short, job shop settings, just-in-time (JIT) technique which is usually produce fewer than 50, and unknown parameters. To overcome this short-runs, researchers had proposed short-run multivariate control chart such as Scholz-Tosch (1994), named \tilde{F}_m control chart and Khoo-Quah (2002), named V_m control chart. These control charts use successive difference (SD) concept to estimate parameters and data assumes normal multivariate. Therefore, we compare between these two control chart by evaluating the methods theoritically and performances using Average Run Length (ARL_1). Then, we apply it to two data sample set. \tilde{F}_m control chart use SD just to estimates covarince matrix so the control chart is not constructed soon after data is collected. But, V_m control chart use SD to estimates both of parameters so the control chart is constructed soon after several data is collected. Based on ARL_1 , for known parameters case, \tilde{F}_m control chart has higher sensitivity than V_m control chart. But, for unknown parameters case, V_m control chart is better than \tilde{F}_m control chart to detect mean shift.

Keywords: ARL_1 , job shop, just in time, short-run, successive difference

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah *subhanahu wa ta'ala* yang telah memberikan karunia ilmu. Tidak ada hal yang mampu dilakukan Penulis selain bersyukur dan berusaha untuk mengimplementasikan wujud syukur itu dengan berkarya untuk kebaikan dan kebermanfaatan sesama dan tersebarnya ilmu.

Ucapan terima kasih Penulis sampaikan kepada segenap civitas akademika Universitas Brawijaya yang telah membantu memberikan fasilitas dan motivasi kepada Penulis untuk dapat menyelesaikan tesis sebagai salah satu syarat mendapatkan gelar akademik di tingkat magister. Ucapan terima kasih pula Penulis sampaikan kepada beberapa pihak, di antaranya:

1. Dr. Muhammad Mashuri sebagai Promotor
2. Dr. Irhamah sebagai Penasehat Akademik
3. Dr. Suhartono sebagai Ketua Jurusan Statistika ITS
4. Dr. rer. pol. Heri Kuswanto sebagai Ketua Program Pasca Sarjana Jurusan Statistika ITS
5. Dr. Santi Wulan Purnami, Dr. Sony Sunaryo dan Dr. Agus Suharsono sebagai tim Penguji Tesis
6. Segenap Staf Pengajar Pasca Sarjana Statistika ITS
7. Kedua orang tua Penulis: Abi Mu'at dan Umi Jaemah
8. Keluarga kecil Penulis: Neng Nina dan Cah Nayu Zainab DM
9. Kakak-kakak sekeluarga
10. Rekan-rekan kuliah Pasca Sarjana Jurusan Statistika ITS

Disadari bahwa tentu masih terdapat banyak kekurangan dari karya ini sehingga Penulis membuka diri untuk mendapatkan masukan berupa saran dari para pengkaji permasalahan kualitas secara statistika, para dosen, para praktisi dan juga para mahasiswa.

Surabaya, Maret 2017

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	iv
KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI.....	vi
DAFTAR TABEL	viii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR LAMPIRAN	x
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	4
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Bagan Kendali T^2 -Hotelling	5
2.2 Bagan Kendali Multivariat Untuk Amatan Individu	7
2.3 Bagan Kendali Multivariat <i>Short-Run</i> Untuk Amatan Individu	8
2.4 Bagan Kendali Multivariat <i>Short-Run</i> \tilde{F}_m	9
2.5 Bagan Kendali Multivariat <i>Short-Run</i> V_m	11
2.6 <i>Average Run Length (ARL)</i>	13
BAB 3 METODOLOGI PENELITIAN	15
3.1 Konsep Pengembangan Bagan Kendali \tilde{F}_m Dan V_m	15
3.2 Perbandingan Kinerja Bagan Kendali \tilde{F}_m Dan V_m	17
3.2.1 Data Simulasi	17
3.2.2 Data Contoh	25

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	31
4.1 Konsep Pengembangan Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m	31
4.1.1 Bagan Kendali \tilde{F}_m	31
4.1.2 Bagan Kendali V_m	37
4.2 Perbandingan Kinerja Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m	41
4.3 Terapan Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Pada Data Contoh	57
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN	63
5.1 Kesimpulan	63
5.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	67
BIOGRAFI PENULIS	81

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Data Persentase Produksi Biji Jagung	26
Tabel 3.2 Data Quesenberry (2001)	27
Tabel 4.1 Nilai ARL_1 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Kondisi Kedua Parameter Diketahui dengan $m = 20$	42
Tabel 4.2 Nilai ARL_1 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Kondisi Kedua Parameter Diketahui dengan $m = 50$	45
Tabel 4.3 Nilai ARL_1 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui dengan $m = 20$	51
Tabel 4.4 Nilai ARL_1 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui dengan $m = 50$	54
Tabel 4.5 Statistik F_m dan V_m Untuk Data Sullivan-Jones	59
Tabel 4.6 Statistik F_m dan V_m Untuk Data Quesenberry	60

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Diagram Alir Perbandingan Kinerja Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk Kondisi Kedua Parameter Diketahui	19
Gambar 3.2 Diagram Alir Evaluasi Kinerja Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui	23
Gambar 3.3 Diagram Alir Terapan Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m	29
Gambar 4.1 Plot Perbandingan Nilai ARL_1 Kondisi Parameter Diketahui untuk $p = 2$ dengan $m = 20$	44
Gambar 4.2 Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk $p = 2$, $m = 20$ dan $\delta = 0$ Pada Kondisi Kedua Parameter Diketahui	46
Gambar 4.3 Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk $p = 4$, $m = 20$ dan $\delta = 1$ Pada Kondisi Kedua Parameter Diketahui	48
Gambar 4.4 Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk $p = 8$, $m = 50$ dan $\delta = 2$ Pada Kondisi Kedua Parameter Diketahui	49
Gambar 4.5 Plot Perbandingan Nilai ARL_1 Kondisi Parameter Tidak Diketahui untuk $p = 2$ dengan $m = 20$	51
Gambar 4.6 Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk $p = 2$, $m = 20$ dan $\delta = 0$ Pada Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui	54
Gambar 4.7 Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk $p = 4$, $m = 20$ dan $\delta = 1$ Pada Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui	55
Gambar 4.8 Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk $p = 8$, $m = 50$ dan $\delta = 2$ Pada Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui	56
Gambar 4.9 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk Data Contoh Sullivan-Jones ..	60
Gambar 4.10 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk Data Contoh Quesenberry	61

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Uji Normalitas Multivariat	67
Lampiran 2 Program Simulasi Nilai ARL_1	70
Lampiran 3 Program Terapan	78

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Bagan kendali merupakan salah satu teknik pengendalian proses statistika di dunia industri yang secara luas diterapkan sejak pertama kali dikenalkan oleh Dr. Walter E. Shewhart pada tahun 1924. Pertama kali dikenalkan, satu bagan kendali digunakan untuk memonitor satu karakteristik kualitas. Namun, seiring berkembangnya teknologi, suatu produk diamati dan diukur berdasarkan beberapa karakteristik kualitas yang saling berkorelasi. Menurut Mason dan Young (2002), Bersimis, dkk. (2007), dan Montgomery (2009), jika dua atau lebih karakteristik kualitas yang saling berkorelasi dimonitor secara terpisah, maka menjadi tidak efisien dan akan memberikan kesimpulan yang tidak benar. Oleh karena itu, dikembangkan bagan kendali multivariat yang memonitor beberapa karakteristik kualitas secara simultan.

Bagan kendali multivariat pertama kali dikenalkan oleh Harold Hotelling pada tahun 1947, yang kemudian disebut dengan bagan kendali T^2 -Hotelling. Statistik T^2 pada bagan kendali T^2 -Hotelling merupakan suatu nilai yang diperoleh berdasarkan kombinasi perhitungan dari vektor rata-rata dan matriks kovarians dari beberapa karakteristik kualitas (Rogalewicz, 2012). Bagan kendali multivariat T^2 -Hotelling didesain untuk proses produksi dengan jumlah produk yang besar (*big volume*). Selain itu, bagan kendali T^2 -Hotelling mengasumsikan bahwa nilai estimasi parameter vektor rata-rata dan matriks kovarians telah telah sebelum proses produksi berjalan.

Saat ini, proses produksi yang sedang tren adalah proses produksi *short-run*, yakni suatu proses produksi dengan kondisi (Khoo, dkk., 2005 dan Marques, dkk., 2015):

- 1) Proses *job shop* yaitu karakteristik kualitas beserta standar (spesifikasi) yang dimonitor berbeda-beda tiap produk.

- 2) Sistem *Just-in-Time* (JIT) yaitu jumlah produk yang diproduksi sedikit (*low volume*) sehingga proses produksi berjalan lebih pendek dari yang konvensional.
- 3) Parameter proses tidak tersedia. Hal ini dikarenakan tidak cukup atau tidak tersedia data produksi sebelumnya (*no historical data*).

Khoo dan Quah (2002), Elam dan Case (2005), Fonseca, dkk. (2007), Montgomery (2009), Jaupi, dkk. (2013) menambahkan bahwa secara umum proses produksi *short-run* memproduksi produk dengan kuantitas kurang dari 50 (20-50). Dikarenakan jumlah produk yang sedikit, maka amatan yang paling banyak diterapkan pada kondisi *short-run* adalah amatan individu.

Secara konvensional, bagan kendali multivariat amatan individu didasarkan pada bagan kendali klasik T^2 -Hotelling. Untuk menghitung statistik T^2 bagan kendali T^2 -Hotelling, diperlukan statistik vektor rata-rata dan matriks kovarians yang diperoleh berdasarkan data produksi sebelumnya (*historical data*). Dikarenakan pada kondisi *short-run* proses produksi berjalan cepat dan karakteristik kualitas dan spesifikasi berbeda-beda tiap proses produksi, maka data historis relatif sulit diperoleh. Oleh karenanya, hal ini menjadi kendala untuk memonitor proses produksi dengan menggunakan bagan kendali T^2 -Hotelling konvensional.

Untuk mengatasi kondisi (1) dan (2) pada proses produksi *short-run*, para peneliti telah mengusulkan beberapa bagan kendali multivariat *short-run*. Beberapa di antaranya adalah Scholz dan Tosch (1994) yang mengusulkan bagan kendali multivariat X untuk sampel berukuran kecil, Quesenberry (2001) mengusulkan bagan kendali multivariat *snapshot* Q , Khoo dan Quah (2002) mengusulkan bagan kendali multivariat V_m . Selain itu, pada tahun 2005, Khoo dan Gan juga mengusulkan bagan kendali multivariat CUSUM untuk amatan individu menggunakan statistik V_m , Zou, dkk., (2012) mengusulkan bagan kendali multivariat *short-run* EWMA untuk data yang tidak diketahui distribusinya dengan basis *rank-spatial*, Jaupi dkk., (2013) juga mengusulkan bagan kendali multivariat *short-run* untuk mengendalikan rata-rata dan variabilitas dengan melibatkan fungsi pengaruh (*influence function*).

Dari beberapa bagan kendali multivariat *short-run* yang telah diusulkan oleh para peneliti tersebut, terdapat dua bagan kendali yang mempunyai persamaan. Dua bagan kendali tersebut adalah bagan kendali yang diusulkan oleh Scholz dan Tosch (1994) dan bagan kendali yang diusulkan oleh Khoo dan Quah (2002). Persamaan dari kedua bagan kendali tersebut adalah keduanya dikembangkan dari konsep *successive difference* untuk menghitung *estimator* parameter dan mengasumsikan bahwa data yang diamati berdistribusi normal multivariat.

Oleh karena itu, merujuk pada persamaan dari kedua bagan kendali tersebut dan belum adanya kajian tentang keduanya, maka pada penelitian ini akan dilakukan perbandingan atau evaluasi konsep antara bagan kendali multivariat *short-run* yang diusulkan oleh Scholz dan Tosch (1994) dengan bagan kendali yang diusulkan oleh Khoo dan Quah (2002). Selain itu, juga akan dievaluasi kinerja dari keduanya berdasarkan nilai *average run length* (ARL_1). Jadi, dengan evaluasi yang dilakukan, akan dapat diidentifikasi keunggulan dan kekurangan dari kedua bagan kendali, baik dari segi konsep maupun kinerja.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, berikut adalah rumusan masalah yang muncul pada penelitian ini:

1. Bagaimana konsep pengembangan bagan kendali multivariat *short-run* yang diusulkan oleh Scholz dan Tosch (1994) dan Khoo dan Quah (2002)?
2. Bagaimana kinerja dari kedua metode tersebut?

1.3. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini berdasarkan rumusan masalah yang muncul adalah

1. Melakukan kajian konsep pengembangan bagan kendali multivariat *short-run* Scholz dan Tosch (1994) dan Khoo dan Quah (2002).
2. Mengukur kinerja kedua bagan kendali tersebut.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dapat diperoleh dari penelitian ini adalah

1. Pengembangan ilmu statistika di bidang industri.
2. Mengetahui lebih dalam dari segi konsep dan kinerja dari kedua bagan kendali multivariat short-run (Scholz dan Tosch, 1994 dan Khoo dan Quah, 2002).

1.5. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah bagan kendali yang dikaji hanya untuk pergeseran vektor rata-rata proses.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1. Bagan Kendali T^2 -Hotelling

Bagan kendali T^2 -Hotelling adalah bagan kendali yang paling banyak digunakan untuk memonitor dua atau lebih karakteristik kualitas secara simultan. Bagan kendali T^2 -Hotelling diusulkan oleh Harold Hotelling pada tahun 1947 yang mendasarkan penghitungan statistiknya pada jarak Mahalanobis. Jika terdapat m vektor amatan independen berdimensi p , dengan p adalah banyaknya karakteristik kualitas yang diamati, dan $p < m$, maka kuadrat jarak Mahalanobis didefinisikan sebagai

$$MD_i^2 = (\mathbf{x}_i - T(\mathbf{x}))' C(\mathbf{x})^{-1} (\mathbf{x}_i - T(\mathbf{x})), \quad (2.1)$$

di mana

MD_i^2 = Kuadrat jarak Mahalanobis untuk amatan ke- i .

\mathbf{x}_i = Vektor random berisikan data amatan, $i = 1, 2, \dots, m$.

$T(\mathbf{x})$ = Statistik dari parameter lokasi.

$C(\mathbf{x})$ = Statistik dari parameter skala.

Untuk \mathbf{x}_i yang mengikuti distribusi Normal p -variat dengan vektor rata-rata populasi $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks kovarians populasi $\boldsymbol{\Sigma}$, maka MD_i^2 berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas p (Midi dan Shabbak, 2011).

Bentuk umum dari statistik T^2 analog dengan MD_i^2 yakni mengganti statistik parameter lokasi dan skala secara berurutan dengan statistik vektor rata-rata $\bar{\mathbf{x}}$ dan matriks kovarians \mathbf{S} . Berikut adalah statistik T^2 :

$$T_i^2 = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}), \quad (2.2)$$

dengan

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \quad (2.3)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \quad (2.4)$$

di mana

T_i^2 = Statistik T^2 -Hotelling pada amatan ke- i , $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

m = Banyaknya amatan

$\bar{\mathbf{x}}$ = Statistik vektor rata-rata

\mathbf{S} = Statistik matrik kovarians, $\det(\mathbf{S}) \neq 0$.

Pada Fase I (*retrospective analysis*), Tracy, dkk. (1992), Mason dan Young (2002), dan Petros (2003) menyatakan bahwa statistik $\frac{T^2}{d_1(m)}$, di mana

$d_1(m) = \frac{(m-1)^2}{m}$, mengikuti distribusi Beta dengan batas kendali atas (*Upper Control Limits/UCL*) dan batas kendali bawah (*Lower Control Limits/LCL*) adalah sebagai berikut:

$$UCL = \left[\frac{(m-1)^2}{m} \right] B_{\left(\alpha, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2} \right)} \quad (2.5)$$

$$LCL = 0.$$

Sedangkan pada Fase II (*prospective analysis*), statistik $\frac{T^2}{d_2(m, p)}$ mengikuti

distribusi F , di mana $d_2(m, p) = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)}$ dengan UCL dan LCL sebagai

berikut:

$$UCL = \left[\frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} \right] F_{(\alpha, p, m-p)} \quad (2.6)$$

$$LCL = 0.$$

2.2. Bagan Kendali Multivariat Untuk Amatan Individu

Bagan kendali multivariat untuk amatan individu digunakan ketika data yang tersedia untuk tiap-tiap sampel hanya 1 ($n = 1$). Kondisi demikian dikarenakan tidak memungkinkannya data diambil lebih dari 1. Hal ini dapat disebabkan oleh biaya pengukuran yang tinggi atau dikarenakan pengujian produk yang bersifat merusak (*destructive*) (Rogalewicz, 2012). Bagan kendali multivariat untuk amatan individu didasarkan pada bagan kendali multivariat T^2 -Hotelling yakni

$$T^2 = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_m)' \mathbf{S}_m^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_m). \quad (2.7)$$

di mana

- \mathbf{x}_i = Vektor data amatan ke- i (*future observation*).
- $\bar{\mathbf{x}}_m$ = Statistik vektor rata-rata data produksi sebelumnya.
- \mathbf{S}_m^{-1} = Statistik matriks kebalikan kovarians data produksi sebelumnya.

Pada rumusan (2.7) terlihat bahwa statistik T^2 memerlukan data lampau untuk memperoleh statistik vektor rata-rata ($\bar{\mathbf{x}}_m$) dan matriks kovarians (\mathbf{S}_m). Untuk mengatasi permasalahan tersebut, maka Holmes dan Mergen (1993) menggunakan metode *successive difference* untuk mengestimasi vektor rata-rata ($\boldsymbol{\mu}$) dan matriks kovarians ($\boldsymbol{\Sigma}$) berdasarkan data amatan produksi mendatang, yakni

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{V}'\mathbf{V}}{m-1} \quad (2.8)$$

dengan

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_{m-1} \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{v}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i; i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Tracy, dkk. (1992), Bersimis, dkk. (2007) dan Rogalewicz (2012) menyatakan rumusan bagan kendali multivariat untuk amatan individu untuk Fase I dan Fase II adalah sebagai berikut:

Fase I:

$$\begin{aligned} UCL &= \left[\frac{(m-1)^2}{m} \right] B_{\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2} \right)} \\ LCL &= \left[\frac{(m-1)^2}{m} \right] B_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, \frac{p}{2}, \frac{m-p-1}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Fase II:

$$\begin{aligned} UCL &= \left[\frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} \right] F_{\left(\frac{\alpha}{2}, p, m-p \right)} \\ LCL &= \left[\frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} \right] F_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, p, m-p \right)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

di mana m adalah banyaknya data lampau dan p adalah banyaknya karakteristik kualitas yang diamati.

2.3. Bagan Kendali Multivariat *Short-Run* Untuk Amatan Individu

Proses produksi *short-run* didefinisikan sebagai suatu keadaan di mana proses produksi bersifat pendek (*short*), antar produksi yang satu dengan yang lain mempunyai standar karakteristik kualitas yang berbeda-beda (*job shop*). Selain itu, proses produksi *short-run* bersifat *just-in-time* (JIT), yakni jumlah produk yang diproduksi sedikit (*low volume*), yaitu umumnya kurang dari 50 item dan parameter proses tidak tersedia dikarenakan tidak cukup atau tidak ada data produksi sebelumnya (Khoo dan Quah, 2002; Khoo, dkk., 2005; Khoo dan Ng, 2005; Elam dan Case, 2005; Fonseca, dkk., 2007; Montgomery, 2009; Jaupi, dkk., 2013; Marques, dkk., 2015).

Dikarenakan sifat dari *short-run* yang demikian, maka bagan kendali multivariat konvensional, T^2 -Hotelling, tidak lagi sesuai. Hal ini disebabkan karena bagan kendali multivariat konvensional sebagaimana pada Persamaan (2.7), memerlukan data produksi sebelumnya untuk mengestimasi parameter μ

dan Σ . Untuk mengatasi permasalahan ketidaktersediaan data produksi sebelumnya, maka para peneliti telah mengusulkan beberapa bagan kendali multivariat *short-run*. Di antaranya adalah Scholz dan Tosch (1994) yang mengusulkan bagan kendali multivariat X untuk sampel berukuran kecil. Scholz dan Tosch (1994) mengembangkan konsep *successive difference* untuk mengestimasi parameter Σ .

Pada tahun 2001, Quesenberry mengusulkan bagan kendali multivariat *snapshot* Q yang merupakan perluasan dari bagan kendali univariat Q oleh Quesenberry (1993). Quesenberry menggunakan fleksibilitas dari bagan kendali univariat Q untuk mengembangkannya menjadi bagan kendali multivariat *snapshot* Q . Selanjutnya, Khoo dan Quah (2002) mengusulkan bagan kendali multivariat V_m . Statistik V_m merupakan modifikasi dan perluasan dari statistik T^2 dengan mentransformasi ke dalam distribusi multivariat normal standar, $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$.

Kemudian, pada tahun 2005, Khoo dan Gan mengusulkan bagan kendali multivariat CUSUM untuk amatan individu menggunakan statistik V_m . Bagan kendali ini menggabungkan konsep CUSUM dengan statistik V_m . Sebagaimana pada konsep CUSUM, tujuan utama dari bagan kendali ini adalah untuk mendeteksi secara cepat kondisi tidak terkendali dari proses produksi *short-run*. Selanjutnya, pada tahun 2012, Zou, dkk. mengusulkan bagan kendali multivariat *short-run* EWMA untuk data yang tidak diketahui distribusinya dengan basis *rank-spatial*. Bagan kendali ini diusulkan untuk mengatasi kurangnya informasi tentang distribusi data (*non-parametrics*) atau untuk data yang tidak berdistribusi normal multivariat. Pada tahun 2013, Jaupi dkk. juga mengusulkan bagan kendali multivariat *short-run* untuk mengendalikan rata-rata dan variabilitas dengan melibatkan fungsi pengaruh (*influence function*).

2.4. Bagan Kendali Multivariat *Short-Run* \tilde{F}_m

Dimisalkan bahwa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ merupakan vektor amatan yang berdistribusi normal p -variat, identik dan independen dengan vektor rata-rata μ dan matriks kovarians Σ . Statistik bagan kendali Scholz dan Tosch dilambangkan

dengan \tilde{F} . Jika kedua parameter (μ dan Σ) diketahui atau $\mu = \mu_0$ dan $\Sigma = \Sigma_0$, maka statistik \tilde{F} dinyatakan dengan

$$\tilde{F}_i = (\mathbf{x}_i - \mu_0)' \Sigma_0^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu_0) \quad (2.11)$$

di mana:

\tilde{F}_i = Nilai statistik \tilde{F} ke- i , $i = 1, 2, 3, \dots$

\mathbf{x}_i = Vektor amatan selanjutnya ke- i .

μ_0 = Vektor rata-rata spesifikasi.

Σ_0 = Matriks kovarians spesifikasi.

Suatu proses dinyatakan tidak terkendali secara statistik jika nilai \tilde{F}_i lebih besar dari batas kendali $UCL = \chi^2_{(\alpha, p)}$, $\tilde{F}_i > \chi^2_{(\alpha, p)}$.

Apabila kedua parameter (μ dan Σ) tidak diketahui, maka Scholz dan Tosch (1994) menggunakan konsep *successive difference*. Jika $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ adalah vektor selisih lokal (*local difference vectors*), maka terbentuk sebanyak $m-1$ matriks kovarians \mathbf{S}_i dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i' \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_{i,1} \cdot y_{i,1} & y_{i,1} \cdot y_{i,2} & \dots & y_{i,1} \cdot y_{i,p} \\ y_{i,2} \cdot y_{i,1} & y_{i,2} \cdot y_{i,2} & \dots & y_{i,2} \cdot y_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i,p} \cdot y_{i,1} & y_{i,p} \cdot y_{i,2} & \dots & y_{i,p} \cdot y_{i,p} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

di mana

\mathbf{S}_i = Matriks kovarian selisih lokal ke- i .

\mathbf{x}_i = Vektor amatan selanjutnya ke- i .

\mathbf{y}_i = Vektor selisih lokal antara vektor amatan ke- i dengan vektor amatan ke- $(i+1)$.

$y_{i,p}$ = Selisih lokal antara amatan ke- i dengan amatan ke- $(i+1)$ pada karakteristik kualitas ke- p .

Gabungan dari \mathbf{S}_i adalah $\tilde{\mathbf{S}}_m$ yang merupakan *estimator* bagi Σ . $\tilde{\mathbf{S}}_m$ dinyatakan dengan

$$\tilde{\mathbf{S}}_m = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{S}_i = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i' . \quad (2.13)$$

Selanjutnya, statistik $\tilde{\mathbf{S}}_m$ digunakan untuk mendapatkan statistik \tilde{F} yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\tilde{F}_i = \frac{d-p+1}{d \cdot p} \frac{m}{m+1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_m)' \tilde{\mathbf{S}}_m^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_m), \quad (2.14)$$

dengan

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \quad (2.15)$$

$$d = \frac{2(m-1)^2}{3m-4} \quad (2.16)$$

di mana:

- \tilde{F}_i = Nilai statistik \tilde{F} ke- i , $i = 1, 2, 3, \dots, m$.
- \mathbf{x}_i = Vektor amatan selanjutnya ke- i .
- $\bar{\mathbf{x}}_m$ = Statistik vektor rata-rata.
- $\tilde{\mathbf{S}}_m^{-1}$ = Statistik matriks kebalikan selisih kovarians.
- m = Banyaknya amatan.
- p = Banyaknya karakteristik kualitas.
- d = Faktor koreksi.

Suatu proses produksi dikatakan tidak terkendali secara statistik (*out-of-control*) jika statistik $\tilde{F}_i > F_{(\alpha, p, d-p+1)}$ (Scholz dan Tosch, 1994).

2.5. Bagan Kendali Multivariat *Short-Run* V_m

Dimisalkan bahwa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ merupakan vektor amatan yang berdistribusi normal p -variat, identik dan independen dengan vektor rata-rata μ dan matriks kovarians Σ . Khoo dan Quah (2002) melambangkan statistik bagan

kendalinya dengan V . Jika kedua parameter diketahui, $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ dan $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$, maka statistik V dirumuskan sebagai berikut:

$$V_m = \Phi^{-1} \left\{ G_p \left(T_m^2 \right) \right\} \quad (2.17)$$

dengan

$$T_m^2 = (\mathbf{x}_m - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_m - \boldsymbol{\mu}_0). \quad (2.18)$$

di mana

V_m = Statistik V_m untuk amatan ke- m , $m = 1, 2, 3, \dots$

T_m^2 = Statistik T^2 -Hotelling untuk amatan ke- m .

\mathbf{x}_m = Vektor amatan selanjutnya ke- m .

$\boldsymbol{\mu}_0$ = Vektor rata-rata spesifikasi.

$\boldsymbol{\Sigma}_0$ = Matriks kovarians spesifikasi.

$\Phi^{-1}(\cdot)$ = Kebalikan fungsi kumulatif distribusi Normal standar.

$G_p(\cdot)$ = Fungsi kumulatif distribusi χ^2 dengan derajat bebas p .

Adapun jika kedua parameter ($\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$) tidak diketahui, maka statistik V dirumuskan dengan

$$V_m = \Phi^{-1} \left\{ H_{p, m-p-1} \left[\left(\frac{(m-1)(m-p-1)}{mp(m-2)} \right) T_m^2 \right] \right\} \quad (2.19)$$

dengan

$$\bar{\mathbf{x}}_{m-1} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{x}_i. \quad (2.20)$$

$$\mathbf{S}_{m-1} = \frac{1}{(m-1)-1} \sum_{i=1}^{m-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})'. \quad (2.21)$$

$$T_m^2 = (\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})' \mathbf{S}_{m-1}^{-1} (\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}). \quad (2.22)$$

di mana

V_m = Statistik V untuk amatan ke- m , $m = p+2, p+3, \dots$

T_m^2 = Statistik T^2 -Hotelling untuk amatan ke- m .

- \mathbf{x}_m = Vektor amatan selanjutnya ke- m .
 $\bar{\mathbf{x}}_{m-1}$ = Statistik vektor rata-rata selisih ke- $(m-1)$.
 \mathbf{S}_{m-1} = Statistik matriks kovarians selisih ke- $(m-1)$.
 m = Banyaknya amatan.
 p = Banyaknya karakteristik kualitas.
 $\Phi^{-1}(\cdot)$ = Kebalikan fungsi kumulatif distribusi Normal standar.
 $H_{p,m-p-1}(\cdot)$ = Fungsi kumulatif distribusi F dengan derajat bebas p dan $m-p-1$.

Jika statistik $V_m > 3$, maka vektor rata-rata proses dinyatakan telah bergeser lebih besar dari vektor rata-rata yang sebenarnya (*target*) dan demikian sebaliknya.

2.6. Average Run Length (ARL)

Kriteria yang dapat digunakan untuk mengetahui kinerja dari suatu bagan kendali adalah dengan melihat nilai dari *ARL*. *ARL* didefinisikan sebagai rata-rata banyaknya observasi yang diperlukan untuk mengetahui kondisi tidak terkendali statistik yang pertama kali (Montgomery, 2009). Nilai *ARL* terbagi menjadi dua, yaitu ARL_0 dan ARL_1 . ARL_0 adalah rata-rata banyak observasi yang diperlukan untuk mengetahui kondisi tidak terkendali yang pertama kali pada suatu proses yang terkendali, sedangkan ARL_1 adalah rata-rata banyaknya observasi yang diperlukan untuk mengetahui kondisi tidak terkendali pada suatu proses yang memang tidak terkendali.

Nilai *ARL* juga dapat didefinisikan sebagai nilai harapan suatu titik ke- m pertama yang keluar dari batas kendali. Champ, dkk., (2005) menyatakan nilai *ARL* sebagai berikut:

$$ARL = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P(RL = m) \quad (2.23)$$

di mana

- ARL = Rata-rata titik pertama yang keluar batas kendali.
 m = titik ke- m pertama yang keluar batas kendali.
 $P(RL = m)$ = Peluang titik ke- m adalah titik pertama yang keluar batas kendali.

halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 3

METODOLOGI PENELITIAN

Secara garis besar, ada tiga langkah utama yang dilakukan pada penelitian ini. Langkah pertama adalah melakukan kajian konsep pengembangan bagan kendali \tilde{F}_m dan V_m . Pada kajian konsep pengembangan ini, ada dua kondisi yang dibandingkan dari kedua bagan kendali tersebut yaitu kondisi kedua parameter diketahui dan kondisi kedua parameter tidak diketahui.

Langkah kedua adalah melakukan perbandingan kinerja kedua bagan kendali. Perbandingan kinerja bagan kendali dapat diketahui dengan melihat nilai ARL_1 yang diperoleh dari hasil simulasi. Setelah memperoleh nilai ARL_1 masing-masing untuk bagan kendali, maka selanjutnya adalah membandingkan nilai ARL_1 kedua bagan kendali. Semakin kecil nilai ARL_1 , maka dapat dinyatakan bahwa semakin sensitif suatu bagan kendali mendeteksi adanya pergeseran vektor rata-rata proses dari vektor rata-rata yang sebenarnya (*target*). Selanjutnya, langkah ketiga adalah menerapkan kedua bagan kendali dengan data contoh.

3.1. Konsep Pengembangan Bagan Kendali \tilde{F}_m Dan V_m

Pada tahapan ini, akan dilakukan kajian konsep pengembangan yang melandasi bagan kendali \tilde{F}_m dan V_m . Kajian konsep pengembangan dilakukan dengan menjelaskan rumusan masing-masing bagan kendali yang diusulkan mengikuti suatu distribusi tertentu. Berdasarkan diketahui atau tidak diketahuinya kedua parameter (μ dan Σ), baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m terdapat dua kondisi. Kondisi pertama adalah kedua parameter diketahui dan kondisi kedua adalah kedua parameter tidak diketahui.

Untuk kondisi kedua parameter diketahui, bagan kendali multivariat *short-run* \tilde{F}_m dinyatakan oleh Persamaan (2.11). Evaluasi dilakukan dengan menjelaskan bahwa statistik \tilde{F}_i pada Persamaan (2.11) mengikuti distribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas p . p adalah banyaknya karakteristik kualitas yang diamati. Langkah pertama adalah menyatakan perkalian dua vektor amatan

bersesuaian dengan definisi distribusi Wishart. Selanjutnya adalah menyatakan perkalian antara selisih vektor amatan dengan vektor rata-rata dan kebalikan matriks kovarians ke dalam bentuk kuadratik. Perkalian tersebut kemudian ditulis kembali dalam bentuk kuadratik dengan pendekatan distribusi Khi-Kuadrat.

Demikian pula untuk bagan kendali multivariat *short-run* V_m . Pada kondisi kedua parameter diketahui, statistik V_m pada Persamaan (2.17) akan mengikuti distribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas p . p adalah banyaknya karakteristik kualitas yang diamati. Sama halnya dengan bagan kendali \tilde{F}_m , langkah pertama untuk menjelaskan Persamaan (2.17) adalah menyatakan perkalian dua vektor amatan bersesuaian dengan definisi distribusi Wishart.

Selanjutnya adalah menyatakan perkalian antara selisih vektor amatan dengan vektor rata-rata dan kebalikan matriks kovarians ke dalam bentuk kuadratik. Perkalian tersebut kemudian ditulis kembali dalam bentuk kuadratik dengan pendekatan distribusi Khi-Kuadrat. Berbeda dengan bagan kendali \tilde{F}_m , bentuk kuadratik pada bagan kendali V_m diubah ke dalam bentuk kuantil dari distribusi kumulatif Khi-Kuadrat. Setelah itu, menyatakan kuantil dari distribusi kumulatif Khi-Kuadrat kepada bentuk kebalikan fungsi kumulatif normal standar.

Adapun untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui, rumusan bagan kendali \tilde{F}_m ditulis pada Persamaan (2.14). Pada Persamaan (2.14) diketahui bahwa statistik \tilde{F}_i mengikuti distribusi F dengan numerator p dan denominator $d - p + 1$. d adalah faktor koreksi dan p adalah banyaknya karakteristik kualitas yang diamati. Langkah pertama evaluasi metode bagan kendali multivariat *short-run* amatan individu adalah menentukan statistik \tilde{S}_m yang merupakan gabungan dari $S_i = \frac{1}{2} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i'$. \tilde{S}_m adalah statistik matriks kebalikan selisih kovarians dan \mathbf{y}_i adalah vektor selisih lokal dari \mathbf{x}_i . \tilde{S}_m merupakan *estimator* tak bias bagi Σ .

Langkah selanjutnya adalah membuktikan teorema yang bersesuaian bagi bentuk kuadratik sehingga diperoleh pendekatan distribusi Wishart, $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$. Kemudian, dengan menggunakan pendekatan paradigma Satterthwaite, beberapa bentuk kuadratik dapat didekati dengan distribusi Wishart.

Setelah mendapatkan persamaan pendekatan paradigma Satterthwaite, maka selanjutnya adalah mencari momen pertama dan momen kedua dari bentuk kuadrat statistik dan menyamakannya dengan momen pertama dan kedua dari distribusi parameteranya.

Langkah berikutnya adalah memisalkan $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ sebagai amatan selanjutnya (*future observation*). Kemudian menyatakan bahwa \mathbf{x}_f adalah independen terhadap statistik $\tilde{\mathbf{S}}_m$. Jika \mathbf{x}_f independen terhadap $\tilde{\mathbf{S}}_m$, maka dapat ditunjukkan bahwa statistik $\tilde{F}_m \sim F_{p, d-p+1}$.

Untuk bagan kendali multivariat *short-run* V_m pada kondisi kedua parameter tidak diketahui, statistik V_m dirumuskan pada Persamaan (2.19). Persamaan (2.19) menyebutkan bahwa statistik V_m mengikuti distribusi F dengan numerator p dan denominator $m - p - 1$. p adalah banyaknya karakteristik kualitas yang diamati dan m adalah banyaknya amatan. Langkah pertama evaluasi metode bagan kendali ini adalah membuktikan teorema bentuk kuadrat antara $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ dengan $\mathbf{W} \sim W_p(m, \boldsymbol{\Sigma})$ berdistribusi F . Selanjutnya, berdasarkan teorema tersebut dinyatakan bahwa statistik V_m mengikuti distribusi F . Kemudian, bentuk kuadrat yang diturunkan dari teorema tersebut diubah ke dalam bentuk kuantil dari distribusi kumulatif F . Setelah itu, menyatakan kuantil dari distribusi kumulatif F kepada bentuk kebalikan fungsi kumulatif normal standar.

3.2. Perbandingan Kinerja Bagan Kendali \tilde{F}_m Dan V_m

3.2.1. Data Simulasi

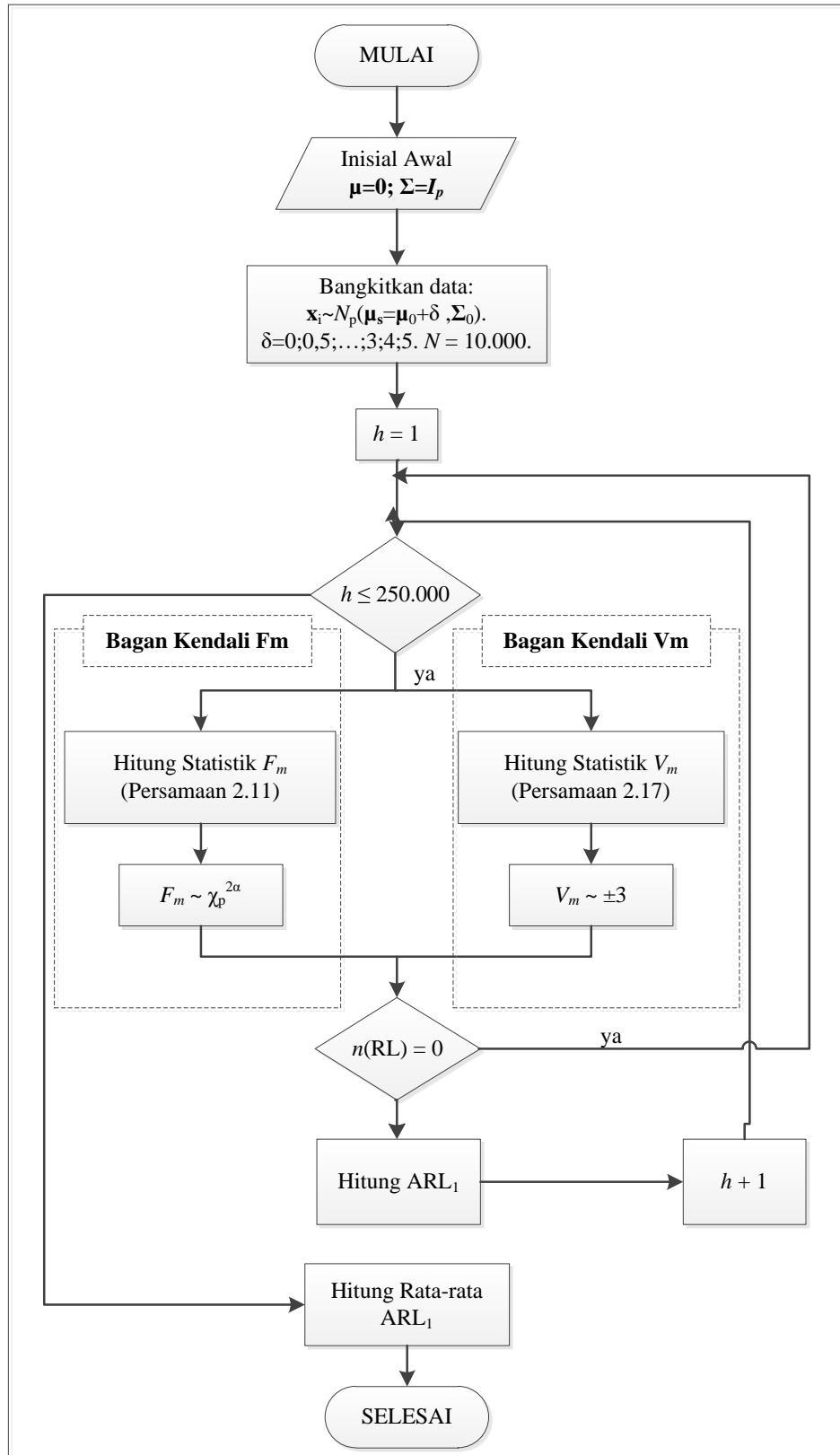
Data simulasi digunakan untuk membandingkan kinerja dari kedua bagan kendali, \tilde{F}_m dengan V_m . Untuk tiap-tiap skema simulasi (lihat pada Sub Bab 3.3), jumlah data yang dibangkitkan adalah 10.000 secara random dari distribusi normal multivariat, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya, baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m , masing-masing mempunyai 2 rumusan yang berbeda. Dua rumusan berbeda tersebut didasarkan atas diketahui atau tidak diketahuinya kedua

parameter ($\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$). Pada perbandingan kinerja bagan kendali, sensitif atau kurang sensitifnya suatu bagan kendali dapat diketahui berdasarkan nilai ARL_1 .

Pada kondisi kedua parameter diketahui, langkah awal pengukuran kinerja bagan kendali \tilde{F}_m adalah inisiasi awal kedua parameter yang diketahui yaitu $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{I}_p$. Selanjutnya adalah membangkitkan data secara random sebanyak $N = 10.000$ yang kemudian dinyatakan sebagai \mathbf{x}_f (*future observation*). Vektor amatan \mathbf{x}_f berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}_s$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{I}_p$, $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{I}_p)$ untuk $p = 2, 4$ dan 8 . p adalah banyaknya karakteristik kualitas yang diamati dan $\boldsymbol{\mu}_s$ adalah vektor rata-rata yang telah mengalami pergeseran proses sebesar δ yaitu $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + \delta$, $\delta = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5$.

Selanjutnya adalah menghitung statistik \tilde{F} sebagaimana pada Persamaan (2.11) yakni $\tilde{F}_i = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)$. Setelah memperoleh statistik \tilde{F} untuk tiap-tiap vektor amatan, maka langkah selanjutnya adalah membandingkan statistik \tilde{F} tersebut dengan $\chi^2_{(\alpha=0,0027,p)}$. Kemudian, mendeteksi ada tidaknya titik yang keluar pertama kali (RL_1). Suatu titik dinyatakan keluar jika statistik $\tilde{F} > \chi^2_{(\alpha=0,0027,p)}$. Jika $RL_1 = 0$, yakni dari sebanyak $N = 10.000$ tidak ada titik yang keluar, maka ulangi langkah-langkah sebelumnya yakni membangkitkan data amatan $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{I}_p)$, menghitung statistik \tilde{F} dan membandingkannya dengan $\chi^2_{(\alpha=0,0027,p)}$. Jika $RL_1 \neq 0$, maka catat sebagai nilai RL_1 . Seluruh proses tersebut diiterasi sebanyak 250.000 kali. Langkah terakhir adalah mencari rata-rata RL_1 (ARL_1). Nilai ARL_1 didapatkan dengan cara menjumlahkan seluruh RL_1 yang diperoleh dari tiap-tiap iterasi dibagi dengan banyaknya iterasi.



Gambar 3.1. Diagram Alir Perbandingan Kinerja Bagan Kendali \tilde{F}_m Dan V_m Untuk Kondisi Kedua Parameter Diketahui

Adapun untuk bagan kendali V_m pada kondisi kedua parameter diketahui, proses inisiasi awal kedua parameter hingga membangkitkan $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{I}_p)$ adalah sama seperti bagan kendali \tilde{F}_m . Setelah membangkitkan data, langkah selanjutnya adalah menghitung statistik V_m sebagaimana pada Persamaan (2.16) yakni $V_m = \Phi^{-1}\{G_p(T_m^2)\}$. Kemudian membandingkan statistik V_m yang telah diperoleh tersebut dengan ± 3 . Selanjutnya adalah mendeteksi ada tidaknya titik yang keluar pertama kali (RL_1). Titik dinyatakan keluar jika $|V_m| > 3$.

Jika $RL_1 = 0$, yakni dari sebanyak $N = 10.000$ tidak ada titik yang keluar, maka ulangi langkah-langkah sebelumnya yakni membangkitkan data amatan $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{I}_p)$, menghitung statistik V_m dan membandingkannya dengan ± 3 . Jika $RL_1 \neq 0$, maka catat sebagai nilai RL_1 . Seluruh proses tersebut diiterasi sebanyak 250.000 kali. Langkah terakhir adalah mencari rata-rata RL_1 (ARL_1). Nilai ARL_1 didapatkan dengan cara menjumlahkan seluruh RL_1 yang diperoleh dari tiap-tiap iterasi dibagi dengan banyaknya iterasi. Gambar 3.1 merupakan diagram alir dari evaluasi kinerja kedua bagan kendali untuk kondisi kedua parameter diketahui.

Berbeda dengan kondisi kedua parameter diketahui, untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui, proses simulasi baik untuk bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m terbagi menjadi dua fase yakni Fase I dan Fase II. Fase I adalah fase estimasi parameter vektor rata-rata dan matriks kovarians berdasarkan m titik yang terkendali (*in-control*). Fase II adalah fase menghitung nilai ARL_1 berdasarkan data bangkitan yang telah mengalami pergeseran terhadap statistik vektor rata-rata dan matriks kovarians yang telah diperoleh pada Fase I.

Pada bagan kendali \tilde{F}_m , Fase I dimulai dengan membangkitkan data secara random sebanyak $N = 10.000$ yang berdistribusi normal multivariat $N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ dengan variasi $p = 2, 4, 8$, p adalah banyaknya karakteristik kualitas. Kemudian, mengambil secara random dari $N = 10.000$ untuk tiap-tiap p sebanyak $m = 20$ dan 50. Selanjutnya, menghitung statistik $\bar{\mathbf{x}}_m$ pada Persamaan (2.15) yaitu

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \quad \text{dan} \quad \tilde{\mathbf{S}}_m \quad \text{pada} \quad \text{Persamaan} \quad (2.13) \quad \text{yaitu} \quad \tilde{\mathbf{S}}_m = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{S}_i$$

$$= \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i' \quad \text{untuk} \quad \text{tiap-tiap} \quad p \quad \text{dan} \quad m.$$

Langkah berikutnya adalah menghitung statistik \tilde{F} sebagaimana pada Persamaan (2.14) yaitu $\tilde{F}_i = \frac{d-p+1}{d \cdot p} \frac{m}{m+1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_m)' \tilde{\mathbf{S}}_m^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_m)$. Setelah mendapatkan statistik \tilde{F} untuk tiap-tiap amatan, maka kemudian membandingkan statistik \tilde{F}_m dengan $F_{(\alpha=0,0027,p,d-p+1)}$. Jika ada 1 titik yang tidak terkendali $\left(\tilde{F}_m > F_{(\alpha=0,0027,p,d-p+1)} \right)$ maka tahapan awal pada fase ini diulangi hingga semua titik m terkendali $\left(\tilde{F}_m < F_{(\alpha=0,0027,p,d-p+1)} \right)$. Jika semua titik m terkendali, maka statistik $\bar{\mathbf{x}}_m$ dan $\tilde{\mathbf{S}}_m$ dari m titik terkendali ini disimpan untuk perhitungan pada Fase II.

Pada Fase II, langkah awalnya adalah membangkitkan data secara random sebanyak $N = 10.000$ yang kemudian dinyatakan sebagai \mathbf{x}_f (*future observation*). Vektor amatan \mathbf{x}_f berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}_s$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{I}_p$, $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{I}_p)$ untuk $p = 2, 4$ dan 8 . p adalah banyaknya karakteristik kualitas yang diamati dan $\boldsymbol{\mu}_s$ adalah vektor rata-rata yang telah mengalami pergeseran proses sebesar δ yaitu $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + \delta$, $\delta = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5$. Kemudian, menghitung statistik \tilde{F}_m sebagaimana pada Persamaan (2.14) dengan memanfaatkan statistik $\bar{\mathbf{x}}_m$ dan $\tilde{\mathbf{S}}_m$ yang diperoleh pada Fase I.

Langkah selanjutnya adalah membandingkan antara statistik \tilde{F}_m dengan $F_{(\alpha=0,0027,p,d-p+1)}$ dan menyatakan tidak terkendali secara statistik jika dan hanya jika $\tilde{F}_m > F_{(\alpha=0,0027,p,d-p+1)}$. Kemudian, mendeteksi ada tidaknya titik yang keluar pertama kali (*Run Length/RL₁*). Jika $RL_1 = 0$ yakni dari sebanyak $N = 10.000$ tidak ada titik yang keluar, maka ulangi langkah-langkah sebelumnya yakni membangkitkan data amatan $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{I}_p)$, menghitung statistik \tilde{F} dan

membandingkannya dengan $F_{(\alpha=0,0027,p,d-p+1)}$. Jika $RL_1 \neq 0$, maka catat sebagai nilai RL_1 . Seluruh proses tersebut diiterasi sebanyak 250.000 kali. Langkah terakhir adalah mencari rata-rata RL_1 (ARL_1). Nilai ARL_1 didapatkan dengan cara menjumlahkan seluruh RL_1 yang diperoleh dari tiap-tiap iterasi dibagi dengan banyaknya iterasi.

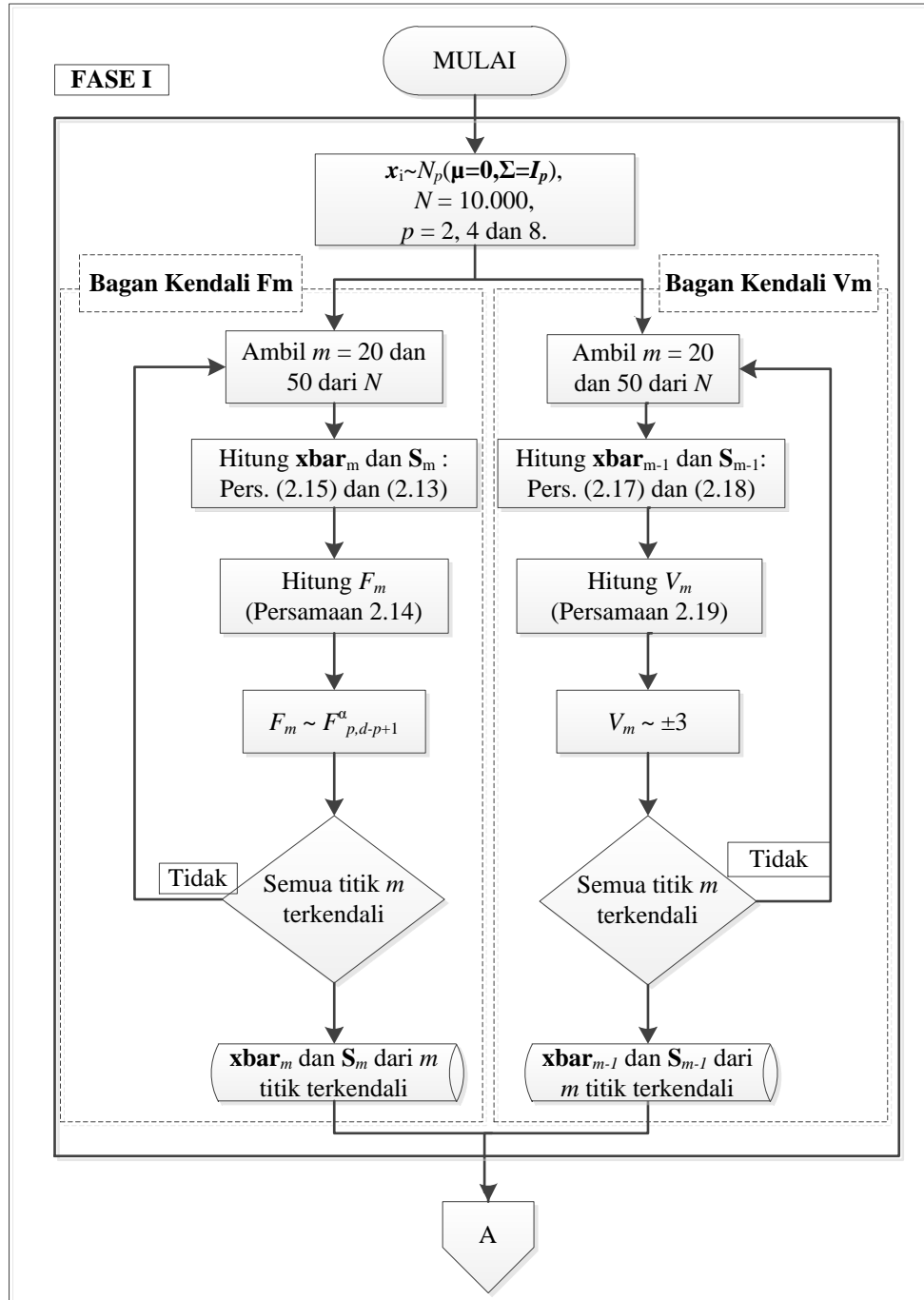
Seperti halnya bagan kendali \tilde{F}_m , langkah awal Fase I dari bagan kendali V_m adalah membangkitkan data secara random. Data random tersebut berdistribusi normal multivariat $N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ sebanyak $N = 10.000$ dengan $p = 2, 4, 8$ di mana p adalah banyaknya karakteristik kualitas. Selanjutnya adalah mengambil secara random dari $N = 10.000$ untuk tiap-tiap p sebanyak $m = 20$ dan 50 . Kemudian, menghitung statistik $\bar{\mathbf{x}}_{m-1}$ pada Persamaan (2.20) yaitu $\bar{\mathbf{x}}_{m-1} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{x}_i$ dan \mathbf{S}_{m-1}

pada Persamaan (2.21) yaitu $\mathbf{S}_{m-1} = \frac{1}{(m-1)-1} \sum_{i=1}^{m-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})'$.

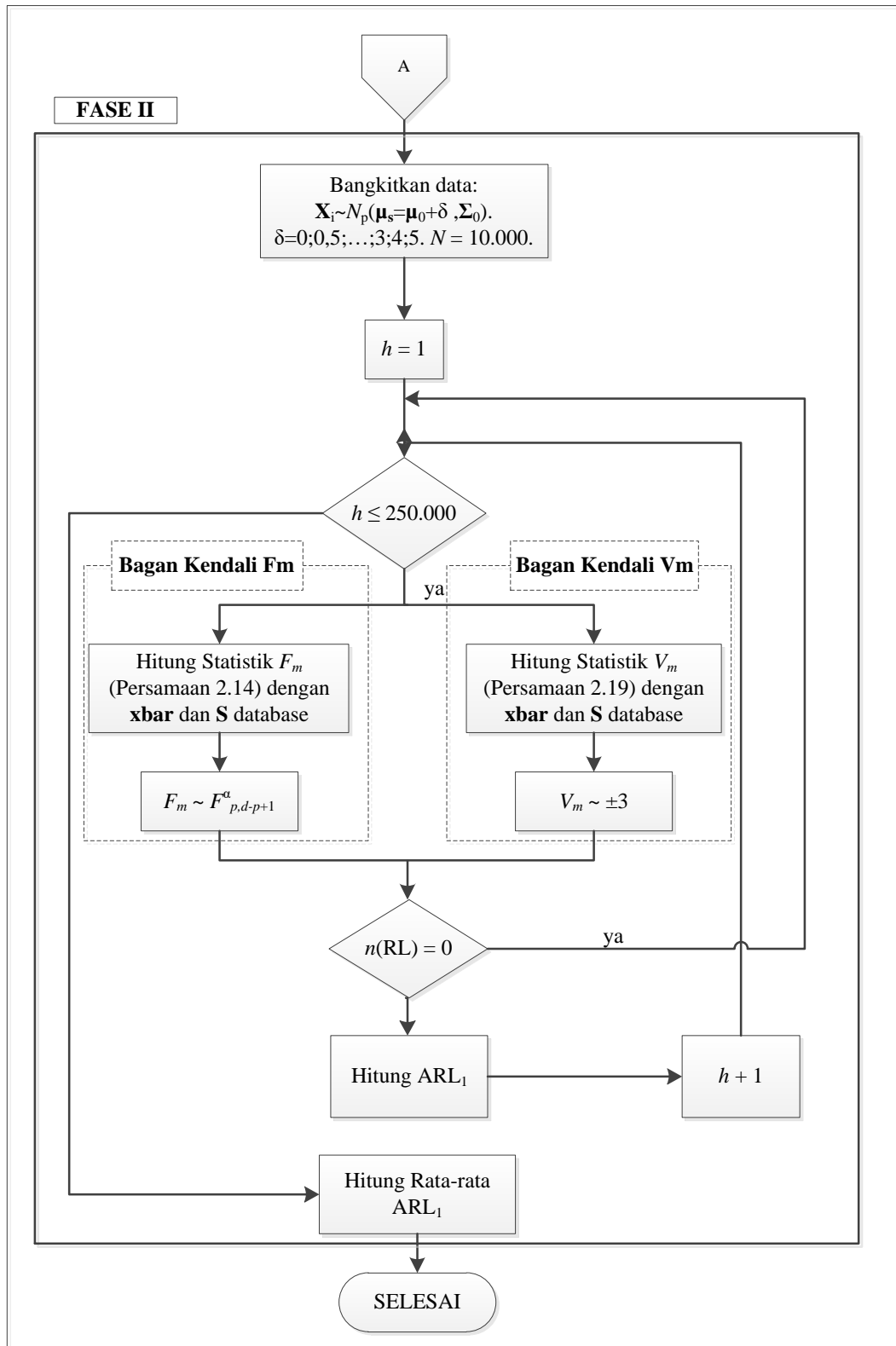
Setelah menghitung $\bar{\mathbf{x}}_{m-1}$ dan \mathbf{S}_{m-1} , langkah selanjutnya adalah menghitung statistik V_m sebagaimana pada Persamaan (2.19) yaitu $V_m = \Phi^{-1} \left\{ H_{p,m-p-1} \left[\left(\frac{(m-1)(m-p-1)}{mp(m-2)} \right) T_m^2 \right] \right\}$ untuk tiap-tiap titik amatan dimulai pada titik $m = p+2, p+3, \dots$. Kemudian, membandingkan statistik V_m dengan batas kendali ± 3 . Jika ada 1 titik yang tidak terkendali ($|V_m| > 3$) maka kembali ke tahapan awal pada fase ini hingga semua titik m terkendali ($|V_m| < 3$). Jika semua titik m terkendali, maka statistik $\bar{\mathbf{x}}_{m-1}$ dan $\tilde{\mathbf{S}}_{m-1}$ dari m titik terkendali ini disimpan untuk perhitungan pada Fase II.

Langkah selanjutnya setelah mendapatkan statistik $\bar{\mathbf{x}}_{m-1}$ dan $\tilde{\mathbf{S}}_{m-1}$ adalah ke Fase II. Langkah awal Fase II adalah membangkitkan data secara random sebanyak $N = 10.000$ yang kemudian dinyatakan sebagai \mathbf{x}_f (*future observation*). Vektor amatan \mathbf{x}_f berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}_s$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{I}_p$, $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{I}_p)$ untuk $p = 2, 4$ dan 8 . p adalah

banyaknya karakteristik kualitas yang diamati dan μ_s adalah vektor rata-rata yang telah mengalami pergeseran proses sebesar δ yaitu $\mu_s = \mu_0 + \delta$, $\delta = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5$.



Gambar 3.2. Diagram Alir Perbandingan Kinerja Bagan Kendali \tilde{F}_m Dan V_m Untuk Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui



Kemudian, menghitung statistik V_m sebagaimana pada Persamaan (2.19) dengan memanfaatkan statistik $\bar{\mathbf{x}}_{m-1}$ dan $\tilde{\mathbf{S}}_{m-1}$ yang diperoleh pada Fase I. Statistik V_m yang telah diperoleh kemudian dibandingkan dengan batas kendali ± 3 . Statistik V titik ke- m dinyatakan tidak terkendali secara statistik jika dan hanya jika $(|V_m| > 3)$. Selanjutnya adalah mendeteksi ada tidaknya titik yang keluar pertama kali (*Run Length*/ RL_1). Jika $RL_1 = 0$ yakni dari sebanyak $N = 10.000$ tidak ada titik yang keluar, maka ulangi langkah-langkah sebelumnya yakni membangkitkan data amatan $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{I}_p)$, menghitung statistik V_m dan membandingkannya dengan ± 3 . Jika $RL_1 \neq 0$, maka catat sebagai nilai RL_1 . Seluruh proses tersebut diiterasi sebanyak 250.000 kali. Langkah terakhir adalah mencari rata-rata RL_1 (ARL_1). Nilai ARL_1 didapatkan dengan cara menjumlahkan seluruh RL_1 yang diperoleh dari tiap-tiap iterasi dibagi dengan banyaknya iterasi.

3.2.2. Data Contoh

Sebagai terapan, ada dua set data contoh yang digunakan pada penelitian ini. Set data pertama adalah data persentase produksi biji jagung yang digunakan oleh Sullivan dan Jones (2002). Biji jagung terdiri atas 2 karakteristik ($p = 2$): besar dan sedang. Data amatan sebanyak 56 dengan tiap amatan adalah persentasi masing-masing karakteristik biji jagung. Data persentase produksi biji jagung dinyatakan pada Tabel 3.1. Adapun set data kedua adalah data yang digunakan oleh Quesenberry (2001). Data terdiri atas 11 karakteristik kualitas ($p = 11$) dengan banyak amatan $m = 30$. Data Quessenberry (2001) dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.1. Data Persentase Produksi Biji Jagung

Amatan ke-	Ukuran Biji		Amatan ke-	Ukuran Biji	
	Besar	Sedang		Besar	Sedang
1	5.4	93.6	29	7.4	83.6
2	3.2	92.6	30	6.8	84.8
3	5.2	91.7	31	6.3	87.1
4	3.5	86.9	32	6.1	87.2
5	2.9	90.4	33	6.6	87.3
6	4.6	92.1	34	6.2	84.8
7	4.4	91.5	35	6.5	87.4
8	5	90.3	36	6	86.8
9	8.4	85.1	37	4.8	88.8
10	4.2	89.7	38	4.9	89.8
11	3.8	92.5	39	5.8	86.9
12	4.3	91.8	40	7.2	83.8
13	3.7	91.7	41	5.6	89.2
14	3.8	90.3	42	6.9	84.5
15	2.6	94.5	43	7.4	84.4
16	2.7	94.5	44	8.9	84.3
17	7.9	88.7	45	10.9	82.2
18	6.6	84.6	46	8.2	89.8
19	4	90.7	47	6.7	90.4
20	2.5	90.2	48	5.9	90.1
21	3.8	92.7	49	8.7	83.6
22	2.8	91.5	50	6.4	88
23	2.9	91.8	51	8.4	84.7
24	3.3	90.6	52	9.6	80.6
25	7.2	87.3	53	5.1	93
26	7.3	79	54	5	91.4
27	7	82.6	55	5	86.2
28	6	83.5	56	5.9	87.2

Sumber: Sullivan dan Jones (2002)

Tabel 3.2. Data Quessenberry (2001)

X₁	X₂	X₃	X₄	X₅	X₆	X₇	X₈	X₉	X₁₀	X₁₁
0.567	60.558	20.7	9.26	5.49	31.11	1.27	7.123	1.3	230.9	8.6
0.538	56.303	20.8	9.49	4.01	31.16	1.25	7.122	0.7	230.8	9.9
0.530	59.524	21.4	8.59	6.34	31.11	1.22	7.124	1.3	231.4	9.0
0.562	61.102	21.2	13.33	5.65	31.15	1.36	7.123	1.0	232.2	10.1
0.483	59.834	21.0	8.45	2.63	31.18	1.37	7.122	1.0	231.3	7.5
0.525	60.228	20.7	10.34	4.24	31.17	1.31	7.123	1.1	230.8	9.9
0.556	60.675	21.5	5.08	2.83	31.19	1.17	7.125	1.2	230.4	7.5
0.586	60.489	20.8	11.39	3.86	31.19	1.30	7.122	1.0	229.8	9.2
0.547	61.067	20.9	4.54	5.24	31.11	1.29	7.123	1.7	231.3	7.9
0.531	59.788	21.2	9.69	4.19	31.15	1.28	7.122	0.8	230.4	10.3
0.581	58.640	21.1	11.20	6.06	31.10	1.37	7.123	1.0	231.0	9.2
0.585	59.754	20.7	14.69	4.82	31.17	1.33	7.124	1.7	231.2	10.0
0.540	59.718	21.2	12.05	3.54	31.25	1.29	7.123	1.6	231.1	8.2
0.458	61.607	21.3	7.52	4.84	31.11	1.31	7.123	1.4	230.5	8.0
0.554	59.788	21.3	9.22	5.65	31.17	1.27	7.123	1.6	231.6	7.3
0.469	58.640	21.5	15.32	4.51	31.13	1.32	7.125	1.4	230.2	10.3
0.471	59.574	20.6	9.40	4.11	31.22	1.34	7.122	1.5	230.4	8.6
0.457	59.718	21.1	7.40	5.28	31.13	1.30	7.123	1.3	230.2	7.1
0.565	60.901	20.8	9.81	5.19	31.09	1.36	7.123	1.3	232.0	9.8
0.664	60.180	20.9	10.01	4.54	31.12	1.38	7.122	1.1	230.6	9.8
0.600	60.943	21.1	14.40	4.63	31.09	1.23	7.124	1.2	231.6	8.9
0.586	58.370	20.9	10.22	5.84	31.17	1.33	7.122	1.5	229.8	10.8
0.567	60.216	20.9	8.11	4.96	31.19	1.26	7.124	1.5	230.5	7.4
0.496	60.214	20.6	8.92	5.41	31.17	1.28	7.122	1.3	231.6	8.1
0.485	59.500	21.7	12.43	4.60	31.05	1.36	7.123	1.2	232.7	9.0
0.572	60.052	20.7	8.01	2.88	31.06	1.35	7.121	1.5	232.0	9.3
0.520	59.501	21.1	5.91	5.45	31.18	1.25	7.124	1.3	229.5	9.9
0.556	58.476	21.4	12.19	5.35	31.11	1.34	7.125	1.2	232.7	8.7
0.539	58.666	21.2	13.75	4.44	31.11	1.27	7.121	1.2	229.6	8.5
0.554	60.239	21.0	12.66	5.31	31.32	1.31	7.123	0.4	230.7	9.3

Sumber: Quessenberry (2001)

Data contoh terapan yang digunakan adalah data yang digunakan oleh Sullivan dan Jones (2002) dengan $p = 2$ dan Quesenberry (2001) dengan $p = 11$. Langkah pertama penerapan kedua bagan kendali tersebut adalah memasukkan data. Dikarenakan kedua bagan kendali mengasumsikan bahwa data harus berdistribusi normal multivariat, maka langkah selanjutnya adalah menguji apakah

data mengikuti distribusi normal multivariat ataukah tidak. Jika data tidak memenuhi asumsi normal multivariat, maka dilakukan transformasi.

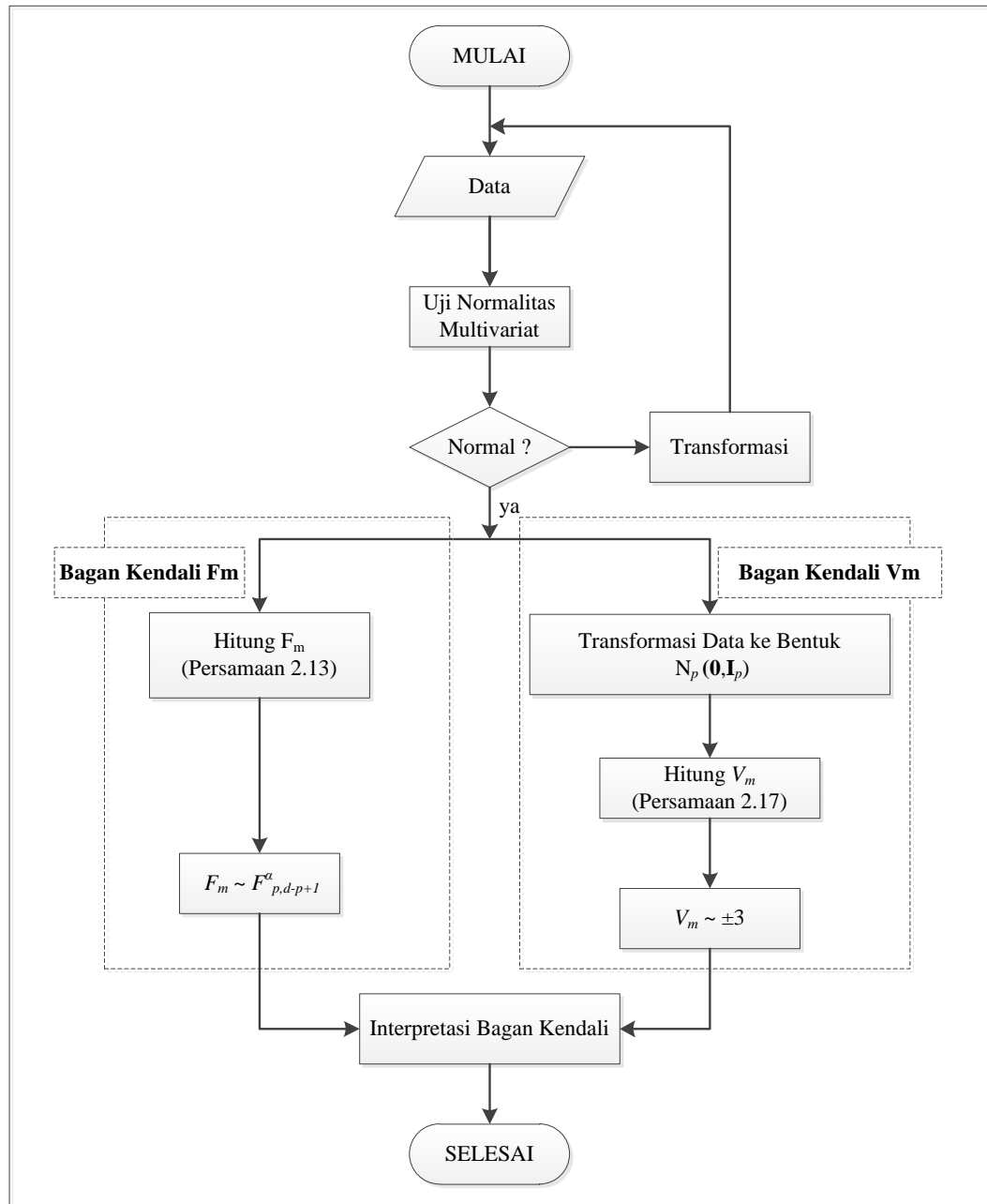
Setelah itu, untuk bagan kendali \tilde{F}_m adalah menghitung statistik \tilde{F}_m . Dikerenakan pada contoh tidak diketahui statistik kedua parameter, maka rumusan yang digunakan adalah rumusan untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui sebagaimana pada Persamaan (2.14) yaitu

$$\tilde{F}_i = \frac{d-p+1}{d \cdot p} \frac{m}{m+1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_m)' \tilde{\mathbf{S}}_m^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_m).$$

Adapun untuk bagan kendali V_m , setelah menyatakan data berdistribusi normal multivariat, langkah selanjutnya adalah mentransformasi data ke dalam bentuk normal multivariat standar. Kemudian, menghitung statistik V_m sebagaimana pada Persamaan (2.19) yaitu

$$V_m = \Phi^{-1} \left\{ H_{p, m-p-1} \left[\left(\frac{(m-1)(m-p-1)}{mp(m-2)} \right) T_m^2 \right] \right\}. \text{ Langkah berikutnya adalah}$$

membandingkan antara statistik \tilde{F}_m dengan $F_{(\alpha=0,0027, p, d-p+1)}$ untuk bagan kendali \tilde{F}_m . Kemudian, menyatakan tidak terkendali secara statistik jika dan hanya jika $\tilde{F}_m > F_{(\alpha=0,0027, p, d-p+1)}$. Sedangkan untuk bagan kendali V_m , statistik V_m dibandingkan dengan ± 3 dan menyatakan suatu titik tidak terkendali jika dan hanya jika titik tersebut berada di luar batas ± 3 .



Gambar 3.3. Diagram Alir Terapan Bagan Kendali \tilde{F}_m Dan V_m

- halaman ini sengaja dikosongkan -

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Konsep Pengembangan Bagan Kendali \tilde{F}_m Dan V_m

Pada sub-bab ini akan dikaji secara statistika-matematika konsep pengembangan baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m . Berdasarkan diketahui atau tidak diketahuinya kedua parameter, rumusan kedua bagan kendali multivariat *short-run* amatan individu terbagi menjadi dua kondisi yaitu, kedua parameter diketahui dan kedua parameter tidak diketahui.

4.1.1. Bagan Kendali \tilde{F}_m

Pada kondisi kedua parameter diketahui ($\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0; \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$), sebagaimana pada Persamaan (2.11) yaitu $\tilde{F}_i = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)$, statistik \tilde{F} mengikuti distribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas p . p menyatakan banyaknya karakteristik kualitas yang diamati. Sehingga, akan dijelaskan bahwa untuk kondisi kedua parameter diketahui, adalah benar bahwa $\tilde{F}_i = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \sim \chi^2_{(\alpha, p)}$.

Dinyatakan bahwa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ merupakan vektor amatan yang berdistribusi normal p -variat, identik dan independen dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$ atau $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Jika $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka $(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Definisi 4.1.

Jika $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ berdistribusi normal p -variat, identik dan independen, $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$; maka $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$ akan berdistribusi Wishart dengan derajat bebas m .

(Seber, 2004)

Berdasarkan Definisi 4.1,

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \sim W_p(m, \boldsymbol{\Sigma}); (\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0).$$

Jika $\mathbf{C}\mathbf{C}' = \boldsymbol{\Sigma}$, di mana \mathbf{C} adalah matrik non-singular berukuran $p \times p$, maka

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$$

dan

$$\mathbf{U}'\mathbf{U} = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0).$$

Perkalian matriks $\mathbf{U}'\mathbf{U}$ merupakan jumlah kuadrat dari p variabel saling bebas yang masing-masing berdistribusi $N(0,1)$, sehingga $\mathbf{U}'\mathbf{U} \sim \chi_p^2$. Jika $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$,

maka benar bahwa $\tilde{F}_i = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \sim \chi_{(\alpha, p)}^2$.

Berbeda dengan kondisi ketika vektor rata-rata dan matriks kovarians diketahui. Jika kedua parameter tersebut tidak diketahui, maka sebagaimana pada Persamaan (2.14), statistik \tilde{F} akan mengikuti distribusi F dengan numerator p dan denominator $d - p + 1$. p menyatakan banyaknya karakteristik kualitas yang

diamati. d disebut faktor koreksi dengan $d = \frac{2(m-1)^2}{3m-4}$ dan m adalah banyaknya

amatan. Oleh karena itu, akan dijelaskan secara teori adalah benar bahwa

$$\tilde{F}_m = \frac{d - p + 1}{d \cdot p} \frac{m}{m + 1} (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}_m)' \tilde{\mathbf{S}}_m^{-1} (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}_m) \sim F_{p, d-p+1}.$$

Dimisalkan bahwa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ merupakan vektor amatan yang berdistribusi normal p -variat, identik dan independen dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$ atau $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Dimisalkan pula bahwa $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ untuk $i = 1, \dots, m-1$ adalah vektor selisih lokal (*local difference vector*). Untuk semua vektor selisih lokal \mathbf{y}_i , apabila dinyatakan dalam bentuk matriks, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}'_1 \\ \mathbf{y}'_2 \\ \mathbf{y}'_3 \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_4 - \mathbf{x}'_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_m - \mathbf{x}'_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}'_1 \\ \mathbf{y}'_2 \\ \mathbf{y}'_3 \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{x}'_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{X}.$$

di mana \mathbf{D} disebut sebagai matriks pembeda (*differencing matrix*).

Diketahui bahwa

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \mathbf{y}_i \mathbf{y}'_i$$

dan *estimator* tak bias gabungan ($\tilde{\mathbf{S}}_m$) untuk Σ adalah

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_m &= \frac{1}{(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{S}_i \\ &= \frac{1}{2(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{y}_i \mathbf{y}'_i \\ &= \frac{1}{2(m-1)} \mathbf{Y}'\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

$$\text{Jika } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{D}'\mathbf{D}, \text{ maka } \tilde{\mathbf{S}}_m = \frac{1}{2(m-1)} \mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \frac{1}{m-1} \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}.$$

Teorema 4.1.

Diketahui bahwa $\mathbf{X}' = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m)$ di mana $\mathbf{x}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ dan $\mathbf{v} = \mathbf{X}\xi$, $\xi (\neq \mathbf{0})$ adalah vektor konstan berukuran $p \times 1$. Jika \mathbf{A} adalah suatu matriks berukuran $m \times m$ dengan rank r , maka $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$ jika dan hanya jika $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v} \sim \sigma_\xi^2 \chi_r^2$ untuk setiap ξ , di mana $\sigma_\xi^2 = \xi'\Sigma\xi$.

(Seber, 2004)

Bukti:

Jika $\mathbf{W} = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$, maka berdasarkan Teorema 4.2. dan

Akibat Teorema 4.2. dapat ditulis $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v} = \xi'\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}\xi = \xi'\mathbf{W}\xi \sim \sigma_\xi^2 \chi_r^2$.

Sebaliknya, jika $\frac{\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v}}{\sigma_\xi^2} \sim \chi_r^2$ untuk beberapa ξ dan $\mathbf{v} \sim N_m(\mathbf{0}, \sigma_\xi^2 \mathbf{I}_m)$, maka

\mathbf{A} idempoten dengan rank r . Oleh karena itu, $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i'$ di mana \mathbf{a}_i adalah vektor eigen orthonormal berkorespondensi dengan r unit nilai eigen dari \mathbf{A} . Sehingga,

$$\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^r \mathbf{X}'\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i' \mathbf{X} = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i'$$

di mana $\mathbf{u}_i = \mathbf{X}'\mathbf{a}_i$. Jadi, berdasarkan Definisi 4.1, dapat dinyatakan bahwa $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \sim W_p(r, \Sigma)$.

Teorema 4.2.

Jika $\mathbf{W} \sim W_p(m, \Sigma)$ dan \mathbf{C} adalah matriks berukuran $r \times p$ dengan rank r , maka $\mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{C}' \sim W_p(m, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}')$.

Bukti:

Dimisalkan bahwa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ merupakan vektor amatan yang berdistribusi normal p -variat, identik dan independen dengan vektor rata-rata $\mathbf{0}$ dan matriks kovarians Σ atau $\mathbf{x}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. Diketahui bahwa

$\mathbf{W}_0 = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$. Jika $\mathbf{W}_0 \sim W_p(m, \Sigma)$, maka $\mathbf{C}\mathbf{W}_0\mathbf{C}'$ mempunyai distribusi

yang sama dengan $\mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{C}'$. Perhatikan bahwa

$$\mathbf{C}\mathbf{W}_0\mathbf{C}' = \sum_{i=1}^m (\mathbf{C}\mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_i'\mathbf{C}') = \sum_{i=1}^m \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i'$$

di mana \mathbf{y}_i berdistribusi normal p -variat, identik dan independen, $\mathbf{y}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}')$. Dengan demikian, berdasarkan Definisi 4.1, dapat dinyatakan bahwa $\mathbf{C}\mathbf{W}_0\mathbf{C}' \sim W_p(m, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}')$.

Akibat Teorema 4.2.

Jika ξ adalah sembarang vektor konstan berukuran $p \times 1$, ($\xi \neq \mathbf{0}$), maka

$$\xi' \mathbf{W} \xi \sim \sigma_\xi^2 \chi_m^2 \text{ di mana } \sigma_\xi^2 = \xi' \Sigma \xi > 0 \text{ karena } \Sigma > \mathbf{O}.$$

Berdasarkan Teorema 4.1, diketahui bahwa perkalian beberapa $\tilde{\mathbf{S}}_m$ mempunyai distribusi yang dapat didekati dengan distribusi Wishart, $W_p(d, \Sigma)$. Ide dasarnya adalah metode Satterthwaite yang melakukan pendekatan distribusi dari bentuk kuadrat dari perkalian beberapa variabel random (η) berdistribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas d .

Jika diasumsikan $\mu = \mathbf{0}$, maka $v_i = \mathbf{x}_i' \xi \sim N(0, \sigma_\xi^2)$ dan $\mathbf{v}' = (v_1, v_2, \dots, v_m)$.

Menggunakan pendekatan paradigma Satterthwaite untuk beberapa η , maka dapat ditulis persamaan pendekatan seperti berikut:

$$\frac{1}{\eta} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v} \approx \sigma_\xi^2 \chi_d^2$$

Ekspektasi dan varians dari $\frac{1}{\eta} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v}$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\eta} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v}\right) &= \frac{1}{\eta} E(\xi' \mathbf{X}' \mathbf{A} \mathbf{X} \xi) \\ &= \frac{1}{\eta} E[\xi' (m-1) \tilde{\mathbf{S}}_m \xi] \\ &= \frac{m-1}{\eta} E[\xi' \tilde{\mathbf{S}}_m \xi] \\ &= \frac{m-1}{\eta} \sigma_\xi^2. \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{var}\left(\frac{1}{\eta} \mathbf{v}' \mathbf{A} \mathbf{v}\right) &= \frac{1}{4\eta^2} \sum_{i=1}^{m-1} \text{var}\left((v_{i+1} - v_i)^2\right) \\ &\quad + \frac{2}{4\eta^2} \sum_{1 \leq i < j \leq m-1} \text{cov}\left((v_{i+1} - v_i)^2, (v_{j+1} - v_j)^2\right) \\ &= \frac{\sigma_\xi^4}{\eta^2} (3m-4). \end{aligned}$$

Ekspektasi dan varians dari $\sigma_\xi^2 \chi_d^2$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(\sigma_\xi^2 \chi_d^2) &= \sigma_\xi^2 E(\chi_d^2) \\ &= d\sigma_\xi^2. \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{var}(\sigma_\xi^2 \chi_d^2) &= \sigma_\xi^4 \text{var}(\chi_d^2) \\ &= 2d\sigma_\xi^4. \end{aligned}$$

Selanjutnya menyamakan hasil ekspektasi dan varians untuk masing-masing sisi.

$$\frac{m-1}{\eta} \sigma_\xi^2 = d\sigma_\xi^2$$

dan

$$\frac{\sigma_\ell^4}{\eta^2} (3m-4) = 2d\sigma_\ell^4,$$

sehingga diperoleh

$$\eta = \frac{3m-4}{2(m-1)}$$

dan

$$d = \frac{2(m-1)^2}{3m-4}.$$

Dikarenakan η dan d tidak tergantung pada ξ , maka dapat dinyatakan bahwa

$$\frac{(m-1)\tilde{\mathbf{S}}_m}{\eta} = d\tilde{\mathbf{S}}_m \approx W_p(d, \Sigma).$$

Dinyatakan bahwa

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\Sigma}{n}\right) \text{ independen terhadap } \tilde{\mathbf{S}}_m.$$

Lebih lanjut, jika $\mathbf{x}_f \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ adalah amatan selanjutnya (*future observation*), maka $(\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}_m) \sim N_p\left(\mathbf{0}, \Sigma\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)$ juga independen terhadap $\tilde{\mathbf{S}}_m$.

Oleh karena itu, dapat dinyatakan benar bahwa

$\tilde{F}_m = \frac{d-p+1}{d \cdot p} \frac{m}{m+1} (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}_m)' \tilde{\mathbf{S}}_m^{-1} (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}_m)$ mengikuti distribusi F dengan

numerator p dan denominator $d-p+1$. Dengan demikian dapat ditulis:

$$\tilde{F}_m = \frac{d-p+1}{d \cdot p} \frac{m}{m+1} (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}_m)' \tilde{\mathbf{S}}_m^{-1} (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}_m) \sim F_{p, d-p+1}.$$

4.1.2. Bagan Kendali V_m

Metode yang diusulkan oleh Khoo dan Quah untuk kondisi kedua parameter diketahui mempunyai basis yang sama dengan metode yang diusulkan oleh Scholz dan Tosch. Namun, dikarenakan pada metode Khoo dan Quah data yang digunakan harus ditransformasi ke dalam bentuk Normal standar, maka akhir penurunan Persamaan (2.16) menjadi berbeda dengan Persamaan (2.11).

Berikut akan dijelaskan konsep pengembangan metode yang diusulkan oleh Khoo dan Quah sebagaimana pada Persamaan (2.16) yaitu $V_m = \Phi^{-1} \left\{ G_p \left(T_m^2 \right) \right\}$ mengikuti distribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas p . Di mana $\Phi^{-1}(\cdot)$ adalah kebalikan fungsi kumulatif distribusi normal standar dan $G_p(\cdot)$ adalah fungsi kumulatif distribusi χ^2 dengan derajat bebas p .

Dimisalkan bahwa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ merupakan vektor amatan yang berdistribusi normal p -variat, identik dan independen dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$ atau $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Jika $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka $(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Sama halnya dengan pembuktian pada bagan kendali \tilde{F}_m untuk kondisi kedua parameter diketahui, maka dengan menggunakan Definisi 4.1 dinyatakan

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \sim W_p(m, \boldsymbol{\Sigma}); (\cdot: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0).$$

Jika $\mathbf{C}\mathbf{C}' = \boldsymbol{\Sigma}$ di mana \mathbf{C} adalah matrik non-singular berukuran $p \times p$, maka

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p)$$

dan

$$\mathbf{U}'\mathbf{U} = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0).$$

Perkalian matriks $\mathbf{U}'\mathbf{U}$ merupakan jumlah kuadrat dari p variabel saling bebas yang masing-masing berdistribusi $N(0,1)$, sehingga $\mathbf{U}'\mathbf{U} \sim \chi_p^2$. Jika $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$, maka benar bahwa $T_m^2 = (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \sim \chi_p^2$.

Adapun untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui, statistik V_m pada Persamaan (2.19) yaitu mengikuti distribusi F dengan numerator p dan denominator $m - p - 1$. p adalah banyaknya karakteristik kualitas dan m adalah banyaknya amatan. Oleh karena itu, akan ditunjukkan adalah benar bahwa

$$V_m = \Phi^{-1} \left\{ H_{p, m-p-1} \left[\left(\frac{(m-1)(m-p-1)}{mp(m-2)} \right) T_m^2 \right] \right\} \text{ mengikuti distribusi } F.$$

Dimisalkan bahwa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ merupakan vektor amatan yang berdistribusi normal p -variat, identik dan independen dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$. Jika $\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, maka $\bar{\mathbf{x}}_{m-1} \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{m-1}\right)$. Akan ditunjukkan distribusi dari $\bar{\mathbf{x}}$ dengan menggunakan *moment generating function* (MGF) sebagai berikut:

Diketahui MGF untuk distribusi multivariat normal:

$$M_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \exp\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}' + \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right)$$

di mana $\mathbf{t} = [t_1, t_1, \dots, t_p]'$, sehingga

$$\begin{aligned} M_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{t}) &= M_{\sum_{i=1}^m \bar{\mathbf{x}}} \left(\frac{\mathbf{t}}{m} \right) \\ &= \left[\exp\left(\boldsymbol{\mu} \frac{\mathbf{t}'}{m} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{t}'}{m} \boldsymbol{\Sigma} \frac{\mathbf{t}}{m}\right) \right]^m \\ &= \exp\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{t}' + \frac{1}{2}\mathbf{t}' \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{m} \mathbf{t}\right). \end{aligned}$$

Jadi, $\bar{\mathbf{x}} \sim N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{m}\right)$ dan $\bar{\mathbf{x}}_{m-1} \sim N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{m-1}\right)$.

Oleh karena itu,

$$(\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) \sim N_p \left[\mathbf{0}, \left(\frac{m}{m-1} \right) \boldsymbol{\Sigma} \right] \text{ atau}$$

$$\left(\frac{m-1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) \sim N_p (\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Diketahui pula,

$$[(m-1)-1] \mathbf{S}_{m-1} \sim W_p [(m-1)-1, \boldsymbol{\Sigma}],$$

sehingga

$$(m-2) \mathbf{S}_{m-1} \sim W_p [m-2, \boldsymbol{\Sigma}].$$

Dikarenakan

$$(\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) \sim N_p \left[\mathbf{0}, \left(\frac{m}{m-1} \right) \boldsymbol{\Sigma} \right], \text{ maka}$$

$$\left(\frac{m-1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) \sim N_p (\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Teorema 4.3.

Dinyatakan bahwa $T^2 = m\mathbf{x}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}$, di mana $\mathbf{x} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{W} \sim W_p(m, \boldsymbol{\Sigma})$, \mathbf{x} dan \mathbf{W} saling bebas secara statistik. Jika diasumsikan bahwa distribusi-distribusi tersebut *non-singular*, yakni $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$ (definit positif) dan $m \geq p$, maka \mathbf{W}^{-1} ada dengan probabilitas 1. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa

$$\frac{(m-p+1)}{p} \frac{T^2}{m} \sim F_{p, m-p+1}.$$

(Seber, 2004)

Bukti:

Jika diketahui $T^2 = m\mathbf{x}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}$, maka dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{T^2}{m} = \mathbf{x}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}}{\frac{\mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}}} = \frac{M}{N}.$$

Dinyatakan pula bahwa jika $\mathbf{W} \sim W_p(m, \Sigma)$ di mana $m \geq p$, maka

$$\left(\frac{\xi' \Sigma^{-1} \xi}{\xi' \mathbf{W}^{-1} \xi} \right) \sim \chi_{m-p+1}^2 \text{ untuk setiap } \xi (\neq \mathbf{0}) \text{ dengan } \xi \text{ adalah sembarang vektor}$$

konstan berukuran $p \times 1$. Dengan demikian $N \sim \chi_{m-p+1}^2$. Adapun M

mengikuti distribusi χ_p^2 ($M \sim \chi_p^2$). Sehingga $\frac{T^2}{m} = \frac{M}{N}$ merupakan rasio dari

dua distribusi Khi-Kuadrat. Oleh karena itu,

$$\frac{(m-p+1)}{p} \frac{T^2}{m} = \frac{\frac{M}{p}}{\frac{N}{m-p+1}} \sim F_{p, m-p+1}.$$

Berdasarkan Teorema 4.3,

$$\begin{aligned} T^2 &= (m-2) \left[\left(\frac{m-1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) \right]' \left[(m-2) \mathbf{S}_{m-1} \right]^{-1} \left[\left(\frac{m-1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) \right] \\ &= \frac{m-1}{m} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})' \mathbf{S}_{m-1}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) \end{aligned}$$

dan berdasarkan Teorema 4.3 pula, dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \frac{[(m-2)-p+1]}{p} \frac{(m-1)}{m(m-2)} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})' \mathbf{S}_{m-1}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) &\sim F_{(p, (m-2)-p+1)} \\ \frac{(m-p-1)(m-1)}{mp(m-2)} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1})' \mathbf{S}_{m-1}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_m - \bar{\mathbf{x}}_{m-1}) &\sim F_{(p, m-p-1)} \end{aligned}$$

dan dapat ditulis menjadi $\frac{(m-p-1)(m-1)}{mp(m-2)} T^2 \sim F_{(p, m-p-1)}$. Oleh karena itu, benar

$$\text{bahwa } T^2 \sim \frac{mp(m-2)}{(m-p-1)(m-1)} F_{(p, m-p-1)}.$$

4.2. Perbandingan Kinerja Bagan Kendali \tilde{F}_m Dengan V_m

Salah satu ukuran kinerja dari suatu bagan kendali adalah dengan melihat nilai ARL_1 . Oleh karena itu, evaluasi kinerja bagan kendali multivariat *short-run* amatan individu dilakukan dengan menganalisa nilai ARL_1 hasil simulasi dari skema sebagaimana telah dijelaskan pada sub bab 3.3. Sensitifitas dari suatu bagan kendali didasarkan pada besar kecilnya nilai ARL_1 . Semakin kecil nilai ARL_1 , maka akan semakin sensitif suatu bagan kendali dalam mendeteksi adanya titik yang tidak terkendali (*out of control*). Secara praktik, nilai ARL_1 dihitung dengan mencatat titik ke- m pertama yang keluar dari batas bagan kendali.

Pada penelitian ini, simulasi pergeseran terhadap vektor rata-rata dilakukan secara serempak dengan sifat pergeseran positif (+). Misal: untuk $p = 3$, maka

$$\begin{aligned}\mu_s &= \mu_0 + \delta \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \\ \delta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

di mana

μ_0 = Vektor rata-rata spesifikasi.

μ_s = Vektor rata-rata setelah mengalami pergeseran proses sebesar δ .

δ = Besar pergeseran, dengan $\delta = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5$.

Tabel 4.1 merupakan tabel yang berisi nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m dan V_m untuk kondisi kedua parameter diketahui. Nilai ARL_1 yang diperoleh merupakan nilai ARL_1 hasil simulasi dengan perulangan 250.000 kali. Lambang p pada Tabel 4.1 menunjukkan banyaknya karakteristik yang diamati. Pada penelitian ini menggunakan tiga p yaitu 2, 4 dan 8. Untuk tiap-tiap p , nilai ARL_1 terbagi menjadi dua yaitu nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m dan nilai ARL_1 bagan kendali V_m .

Besarnya pergeseran pada tabel ini dilambangkan dengan δ . Nilai δ dimulai dari 0 yang artinya tidak ada pergeseran vektor rata-rata proses, 0,5 artinya vektor rata-rata proses digeser menjauh secara serempak sebesar 0,5 dari vektor rata-rata yang sebenarnya ($\mu_0 = \mathbf{0}$), 1 artinya vektor rata-rata proses digeser

menjauh secara serempak sebesar 0,5 dari vektor rata-rata yang sebenarnya, dan demikian seterusnya untuk nilai $\delta = 1,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5$.

Tabel 4.1. Nilai ARL_1 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Kondisi Kedua Parameter
Diketahui dengan $m = 20$

δ	$p = 2$		$p = 4$		$p = 8$	
	\tilde{F}_m	V_m	\tilde{F}_m	V_m	\tilde{F}_m	V_m
0	370.52	371.63	370.29	370.85	370.19	370.79
0.5	129.56	188.40	101.33	156.48	71.86	117.15
1	27.74	43.30	15.16	22.73	7.26	10.18
1.5	7.71	10.94	3.64	4.69	1.77	2.05
2	3.07	3.87	1.57	1.79	1.08	1.11
2.5	1.68	1.94	1.11	1.15	1.00	1.00
3	1.21	1.30	1.01	1.02	1.00	1.00
4	1.01	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00
5	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Berdasarkan Tabel 4.1, untuk besar $\delta = 0$ atau tidak ada pergeseran vektor rata-rata, bagan kendali \tilde{F}_m , berlaku untuk setiap p , diketahui nilai ARL_1 berada di sekitar angka 370. Nilai $ARL_1 = 370$ artinya, titik amatan ke-370 adalah titik yang pertama kali keluar yang dideteksi oleh bagan kendali. Atau dengan kata lain, bagan kendali membutuhkan amatan sebanyak 370 untuk menyatakan bahwa proses mengalami pergeseran vektor rata-rata. Adapun nilai ARL_1 bagan kendali V_m tanpa ada pergeseran vektor rata-rata adalah di sekitar angka 371, yang artinya untuk menyatakan bahwa proses mengalami pergeseran vektor rata-rata, bagan kendali ini membutuhkan 1 amatan lebih banyak dibandingkan bagan kendali \tilde{F}_m .

Berdasarkan Tabel 4.1 pula, jika besar pergeseran vektor rata-rata adalah $\delta = 0,5$ dengan banyak karakteristik kualitas, p , misal: $p = 4$, diketahui nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m adalah 101, sedangkan untuk bagan kendali V_m nilai $ARL_1 = 157$. Artinya, ketika vektor rata-rata digeser sebesar $\delta = 0,5$ dari vektor rata-rata spesifikasi, bagan kendali \tilde{F}_m memberikan sinyal bahwa telah terjadi pergeseran vektor rata-rata untuk yang pertama kali adalah pada amatan ke-101. Adapun bagan kendali V_m , pada besar pergeseran yang sama ($\delta = 0,5$), mendeteksi bahwa

proses telah terjadi pergeseran vektor rata-rata untuk yang pertama kali adalah pada titik ke-157.

Pada nilai p dan δ yang lain, misal: $p = 8$ dan $\delta = 2$, menurut Tabel 4.1, nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m adalah 1. Artinya, ketika vektor rata-rata digeser sebesar $\delta = 2$ dari vektor rata-rata yang sebenarnya ($\mu_0 = \mathbf{0}$), maka bagan kendali \tilde{F}_m mampu mendeteksi keadaan tersebut pada titik amatan ke-1. Artinya, pada permulaan data diperoleh, ketika proses telah mengalami pergeseran vektor rata-rata, bagan kendali \tilde{F}_m dengan segera menyatakan bahwa memang benar proses telah mengalami pergeseran vektor rata-rata. Secara visual, jika dinyatakan pada plot bagan kendali, maka titik pertama bagan kendali ini berada di luar batas kendali (UCL).

Adapun untuk bagan kendali V_m , pada p dan δ yang sama, yakni $p = 8$ dan $\delta = 2$, berdasarkan Tabel 4.1 nilai ARL_1 juga menunjukkan angka 1. Dengan demikian, dapat diartikan bahwa ketika proses mengalami pergeseran sebesar $\delta = 2$ dari vektor rata-rata yang sebenarnya, bagan kendali V_m mampu memberikan sinyal bahwa benar telah terjadi pergeseran vektor rata-rata proses adalah pada titik amatan ke-1. Atau bagan kendali V_m mempunyai sensitifitas yang sama dengan bagan kendali \tilde{F}_m .

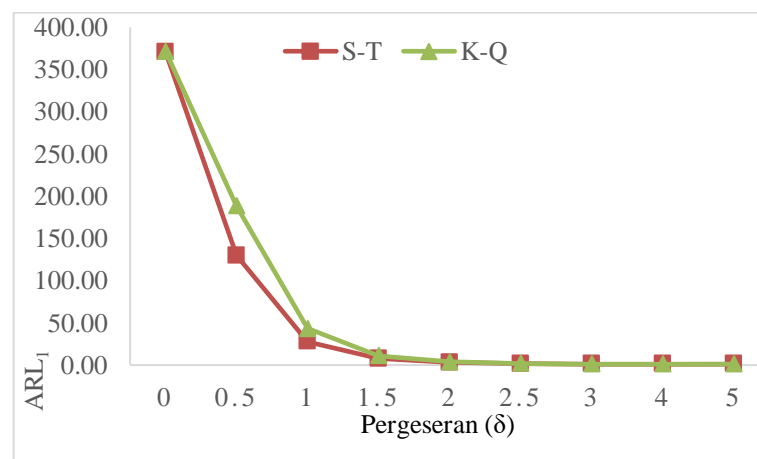
Secara umum, berdasarkan Tabel 4.1 setiap vektor rata-rata proses digeser menjauh dari vektor rata-rata sebenarnya, maka nilai ARL_1 dari kedua bagan kendali tersebut semakin menurun. Artinya, semakin besar nilai pergeserannya, maka akan meningkatkan sensitifitas kedua bagan kendali untuk menyatakan bahwa proses telah mengalami pergeseran vektor rata-rata. Pola ini (semakin besar pergeseran, maka akan semakin kecil nilai ARL_1) berlaku untuk setiap nilai p atau banyaknya karakteristik yang diamati.

Sebagai contoh untuk bagan kendali V_m dengan $p = 4$, pada saat vektor rata-rata tidak digeser ($\delta = 0$), nilai ARL_1 bagan kendali tersebut adalah 371. Namun, ketika besar pergeseran vektor rata-rata ditambah menjadi $\delta = 0,5$, sensitifitas jauh meningkat dua kali lipat. Titik amatan pertama yang memberi sinyal telah terjadi pergeseran vektor rata-rata adalah titik ke-157, setengah dari titik pertama yang keluar ketika $\delta = 0$. Selanjutnya, ketika nilai $\delta = 1$, nilai ARL_1 dari bagan

kendali ini 23, lebih cepat hampir delapan kali lipat dibandingkan ketika bergeser $\delta = 0,5$.

Kondisi menurunnya nilai ARL_1 seiring dengan bertambahnya nilai δ hingga terjadi pada saat nilai $\delta = 5$. Ketika nilai δ adalah sama dengan 3 atau lebih besar, maka nilai ARL_1 menunjukkan angka 1. Artinya, bagan kendali V_m dapat dengan segera mendeteksi bahwa proses memang benar telah terjadi pergeseran vektor rata-rata ketika data pertama diperoleh. Hal ini menunjukkan bahwa sensitifitas bagan kendali V_m semakin meningkat seiring bertambah jauhnya vektor rata-rata digeser dari vektor rata-rata yang sebenarnya.

Selain itu, berdasarkan Tabel 4.1 juga dapat diketahui bahwa banyaknya p atau karakteristik kualitas yang diamati berpengaruh pada besar kecilnya nilai ARL_1 . Hal ini berlaku bagi nilai ARL_1 baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m . Untuk bagan kendali \tilde{F}_m , misal: pada $\delta = 1$, nilai ARL_1 untuk $p = 2$ adalah 28, untuk $p = 4$, nilai ARL_1 menurun menjadi 15 dan nilai ARL_1 untuk $p = 8$ adalah 7. Demikian pula untuk bagan kendali V_m , bertambah banyaknya karakteristik kualitas (p) yang diamati, maka juga akan semakin menurunkan nilai ARL_1 . Sebagai contoh pada $\delta = 1,5$, diketahui bahwa nilai ARL_1 untuk $p = 2$ adalah 11, untuk $p = 4$ adalah 5 dan untuk $p = 8$ adalah 2.



Gambar 4.1. Plot Perbandingan Nilai ARL_1 Kondisi Kedua Parameter Diketahui untuk $p = 2$ dengan $m = 20$

Selain itu, berdasarkan Tabel 4.1, dapat dinyatakan bahwa secara umum bagan kendali \tilde{F}_m pada kondisi kedua parameter diketahui, mempunyai nilai ARL_1 yang lebih kecil dibandingkan dengan nilai ARL_1 bagan kendali V_m . Perbedaan nilai ARL_1 dari kedua bagan kendali tersebut adalah ketika vektor rata-rata digeser sebesar 0,5 sampai dengan 2 dari vektor rata-rata target ($\mu_0 = \mathbf{0}$) (lihat Gambar 4.1). Hal ini juga dapat diartikan bahwa bagan kendali \tilde{F}_m lebih sensitif dalam mendeteksi adanya pergeseran vektor rata-rata dibandingkan dengan bagan kendali V_m . Sedangkan pada besar pergeseran $\delta > 2$, kedua bagan kendali mempunyai nilai ARL_1 yang relatif sama.

Tabel 4.2. Nilai ARL_1 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Kondisi Kedua Parameter Diketahui dengan $m = 50$

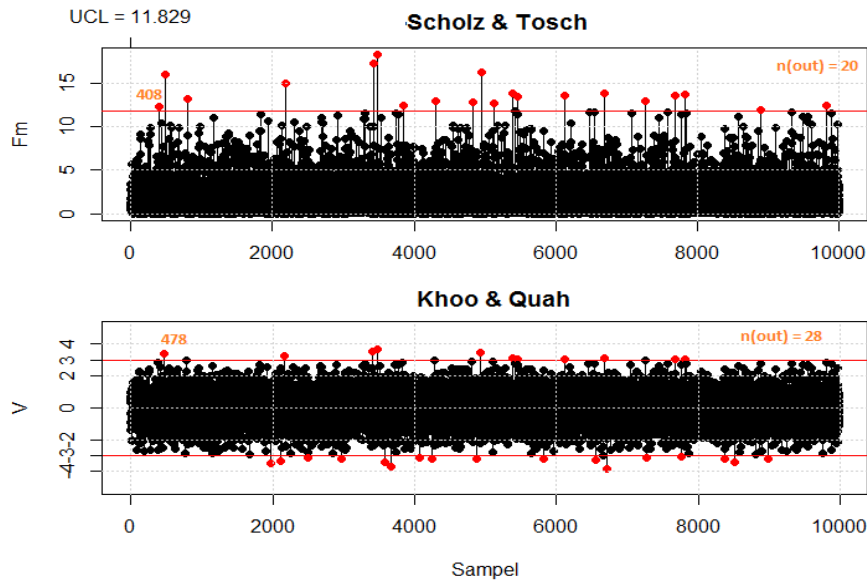
δ	$p = 2$		$p = 4$		$p = 8$	
	\tilde{F}_m	V_m	\tilde{F}_m	V_m	\tilde{F}_m	V_m
0	370.97	372.09	370.74	371.30	370.64	371.24
0.5	129.72	188.63	101.45	156.67	71.95	117.29
1	27.77	43.35	15.18	22.76	7.27	10.19
1.5	7.72	10.95	3.64	4.70	1.77	2.05
2	3.07	3.87	1.57	1.79	1.08	1.11
2.5	1.68	1.94	1.11	1.15	1.00	1.00
3	1.21	1.30	1.01	1.02	1.00	1.00
4	1.01	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00
5	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Pada kondisi kedua parameter diketahui, dengan menambah amatan *in-control* dari $m = 20$ menjadi $m = 50$, nilai ARL_1 untuk kedua bagan kendali tidak mengalami perubahan yang cukup signifikan (relatif sama). Nilai ARL_1 untuk $m = 50$ ini dapat dilihat pada Tabel 4.2. Berdasarkan Tabel 4.2, misal: untuk $p = 2$, diketahui bahwa dengan pergeseran vektor rata-rata sebesar 1 ($\delta = 1$), nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m adalah 28 dan nilai ARL_1 bagan kendali V_m adalah 43. Kedua nilai ini relatif sama dengan nilai ARL_1 untuk $m = 20$ sebagaimana pada Tabel 4.1. Pada Tabel 4.1 nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m dan V_m secara berurutan juga adalah 28 dan 43. Demikian pula untuk p dan δ yang lain, nilai ARL_1 untuk $m = 20$ dan $m = 50$ keduanya adalah relatif sama. Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa

pada kondisi kedua parameter diketahui, banyaknya amatan (m) bagi kedua bagan kendali pada kondisi vektor rata-rata dan matriks kovarians diketahui, tidak berpengaruh secara signifikan terhadap perubahan nilai ARL_1 .

Gambar 4.2 s.d. Gambar 4.4. merupakan contoh plot hasil simulasi dengan p , m dan δ yang berbeda-beda pada kondisi kedua parameter diketahui. Garis merah horizontal menunjukkan batas bagan kendali. Bagi bagan kendali \tilde{F}_m , nilai batas kendali atas ditunjukkan sebagaimana nilai UCL pada gambar dengan batas kendali bawah adalah 0. Nilai UCL untuk bagan kendali \tilde{F}_m pada kondisi kedua parameter adalah berubah-ubah berdasarkan p atau banyaknya karakteristik kualitas yang diamat. Nilai $UCL = \chi^2_{(\alpha=0,0027,p)}$.

Adapun batas kendali dari bagan kendali V_m pada kondisi kedua parameter diketahui tidak tergantung pada sedikit atau banyaknya p . Batas kendali dari bagan kendali ini adalah konstan yaitu $UCL=3$ dan $LCL=-3$. Pada gambar, titik amatan yang berada di dalam batas kendali (*in-control*) dinyatakan dengan bulatan hitam, sedangkan titik amatan yang berada di luar batas kendali (*out-of-control*) dinyatakan dengan bulatan merah.



Gambar 4.2. Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m untuk $p = 2$, $m = 20$ dan $\delta = 0$ Pada Kondisi Kedua Parameter Diketahui

Gambar 4.2 adalah contoh plot bagan kendali \tilde{F}_m dan V_m dari satu kali perulangan dari $N = 10.000$ data. Data tersebut dibangkitkan secara random dengan $\mathbf{x}_f \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + \delta, \mathbf{I}_2)$. Besar pergeseran dari Gambar 4.2 adalah $\delta = 0$, sehingga $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + 0 = \boldsymbol{\mu}_0$ (tidak ada persegeran vektor rata-rata). Batas kendali atas dari bagan kendali \tilde{F}_m adalah $UCL = \chi^2_{(\alpha=0,0027,2)} = 11,829$. Sedangkan batas kendali V_m adalah ± 3 .

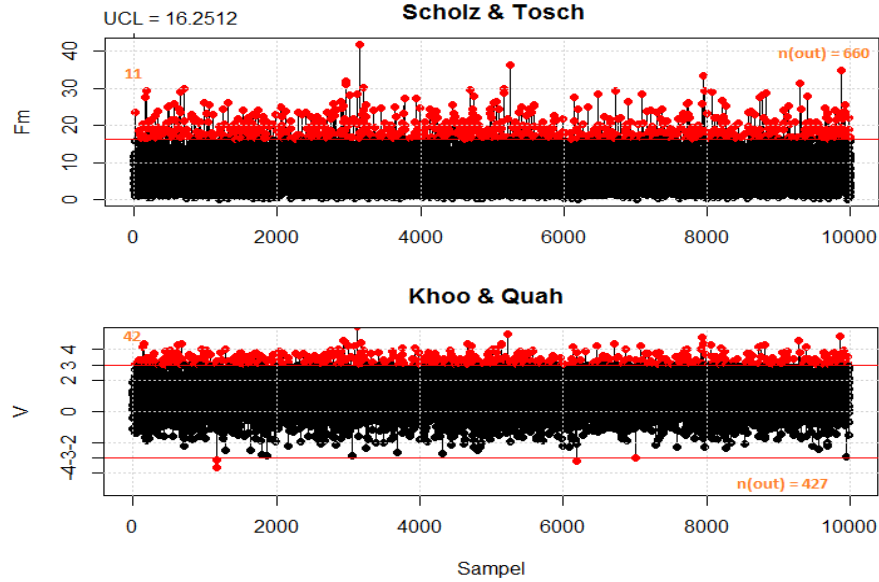
Statistik \tilde{F} bagan kendali \tilde{F}_m yang telah dihitung kemudian diplotkan pada bagan kendali. Demikian pula statistik V bagan kendali V_m juga diplotkan ke bagan kendali. Titik \tilde{F}_m yang berada di dalam batas kendali $UCL = \chi^2_{(\alpha=0,0027,2)} = 11,829$ dan titik V_m yang berada di dalam batas kendali ± 3 dinyatakan sebagai titik-titik yang terkendali (*in-control*) dan diberi tanda bulat hitam. Adapun Titik \tilde{F}_m yang berada di luar batas kendali $UCL = \chi^2_{(\alpha=0,0027,2)} = 11,829$ dan titik V_m yang berada di luar batas kendali ± 3 dinyatakan sebagai titik-titik yang tidak terkendali (*out-of-control*) dan diberi tanda bulat merah.

Berdasarkan Gambar 4.2 titik pertama yang keluar pertama kali (*run length/RL₁*) dari bagan kendali \tilde{F}_m adalah titik ke-408. Adapun untuk bagan kendali V_m , titik amatan ke-470 merupakan titik pertama kali yang keluar dari batas kendali. Berdasarkan Gambar 4.2 pula, dapat diketahui bahwa banyaknya titik yang keluar atau $n(out)$ untuk bagan kendali \tilde{F}_m dari $N = 10.000$ adalah 20 titik. Sedangkan, untuk bagan kendali V_m , banyaknya titik yang keluar adalah 28 titik.

Gambar 4.3 adalah contoh lain dari plot satu kali perulangan simulasi. dua gambar yang analog dengan Gambar 4.2. Data pada Gambar 4.3 dibangkitkan secara random dengan $\mathbf{x}_f \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + \delta, \mathbf{I}_4)$. Besar pergeseran dari Gambar 4.3 adalah $\delta = 1$, sehingga $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + 1 = \mathbf{1}$. Batas kendali atas dari bagan kendali \tilde{F}_m $UCL = \chi^2_{(\alpha=0,0027,4)} = 16,2512$. Sedangkan batas kendali V_m adalah ± 3 .

Berdasarkan Gambar 4.3, dapat diketahui bahwa nilai RL_1 untu bagan kendali \tilde{F}_m adalah 11. Artinya, titik pertama kali yang terdeteksi ketika telah

terjadi pergeseran vektor rata-rata sebesar 1 adalah titik ke-11. Adapun nilai RL_1 untuk bagan kendali V_m adalah 42. Dengan kata lain, bagan kendali V_m mendeteksi lebih lambat 4 kali dibandingkan bagan kendali \tilde{F}_m .

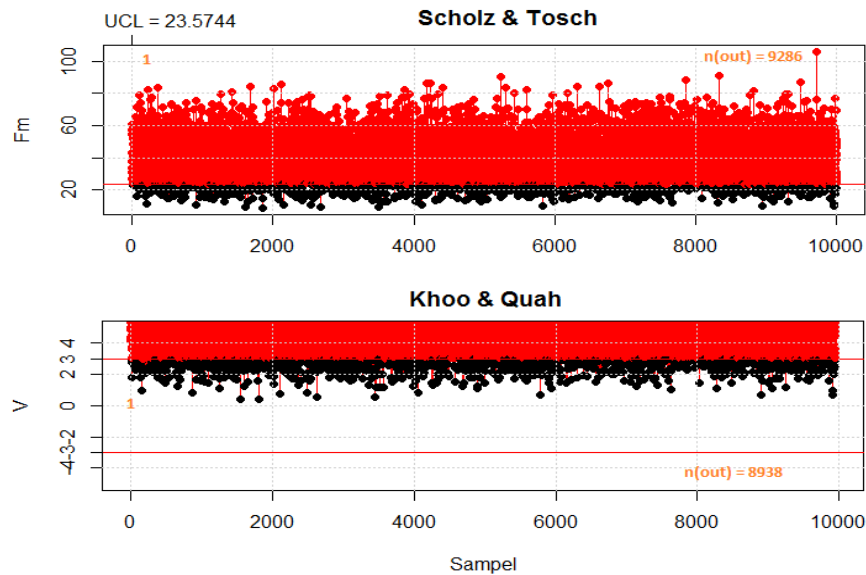


Gambar 4.3. Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m untuk $p = 4$, $m = 20$ dan $\delta = 1$ Pada Kondisi Kedua Parameter Diketahui

Gambar 4.3 juga menunjukkan bahwa ketika vektor rata-rata digeser sebesar $\delta = 1$ dari vektor rata-rata target, maka dari $N = 10.000$ data yang dibangkitkan, terdapat sebanyak 400 hingga 700 atau sekitar 5% hingga 7% titik amatan keluar dari batas kendali. Jauh lebih banyak dibandingkan dengan banyaknya titik yang keluar batas kendali ketika tidak ada pergeseran vektor rata-rata sebagaimana pada Gambar 4.2.

Analog dengan Gambar 4.2 dan Gambar 4.3, Gambar 4.4 juga merupakan contoh dari plot bagan kendali hasil simulasi. Data pada Gambar 4.4 dibangkitkan secara random dengan $\mathbf{x}_f \sim N_8(\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + \delta, \mathbf{I}_8)$. Besar pergeseran dari Gambar 4.4 adalah $\delta = 2$, sehingga $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + 2 = \mathbf{2}$. Batas kendali atas dari bagan kendali \tilde{F}_m adalah $UCL = \chi^2_{(\alpha=0,0027,8)} = 23,5744$. Sedangkan batas kendali V_m adalah sama seperti pada gambar selanjutnya, yakni ± 3 .

Berdasarkan Gambar 4.4 dapat diketahui bahwa nilai RL_1 dari kedua bagan kendali adalah sama yakni 1. Artinya titik pertama kali yang keluar dari batas kendali dari kedua bagan kendali adalah titik amatan ke-1. Dapat diartikan juga bahwa ketika vektor rata-rata digeser menjauh sebesar $\delta = 2$, kedua bagan kendali tersebut dapat dengan segera pada titik pertama mendeteksi bahwa proses memang benar telah terjadi pergeseran. Gambar 4.4 juga menunjukkan bahwa sekitar 90% titik amatan yang keluar dari batas kendali. Artinya, semakin besar pergeseran vektor rata-rata, maka semakin banyak titik amatan yang keluar dari batas kendali.



Gambar 4.4. Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m untuk $p = 8$, $m = 50$ dan $\delta = 2$ Pada Kondisi Kedua Parameter Diketahui

Secara terapan, jika suatu bagan kendali dapat dengan segera mendeteksi adanya pergeseran rata-rata proses dari rata-rata yang sebenarnya (standar perusahaan berdasarkan karakteristik kualitas produk), maka akan dapat meminimalisir kerugian pihak perusahaan. Kerugian dapat berupa biaya produksi, perbaikan barang (*rework*) dan tenaga. Hal ini dikarenakan ketika suatu bagan kendali dapat mendeteksi dengan segera adanya pergeseran rata-rata proses, maka

akan jauh lebih sedikit produk yang diproduksi perusahaan tersebut yang tidak sesuai dengan standar (spesifikasi).

Tabel 4.3 merupakan tabel yang berisi nilai ARL_1 baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui. Sebagaimana yang telah dijelaskan pada Tabel 4.1, nilai ARL_1 yang diperoleh merupakan nilai ARL_1 hasil simulasi dengan perulangan 250.000 kali. Lambang p pada Tabel 4.3 juga menunjukkan banyaknya karakteristik yang diamati.

Besarnya pergeseran pada Tabel 4.3 ini juga sama seperti yang dilambangkan pada Tabel 4.1 yaitu δ . Nilai δ dimulai dari 0 yang artinya tidak ada pergeseran vektor rata-rata proses, 0,5 artinya vektor rata-rata proses digeser menjauh secara serempak sebesar 0,5 dari vektor rata-rata yang sebenarnya ($\mu_0 = 0$), 1 artinya vektor rata-rata proses digeser menjauh secara serempak sebesar 0,5 dari vektor rata-rata yang sebenarnya, dan demikian seterusnya untuk nilai $\delta = 1,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5$.

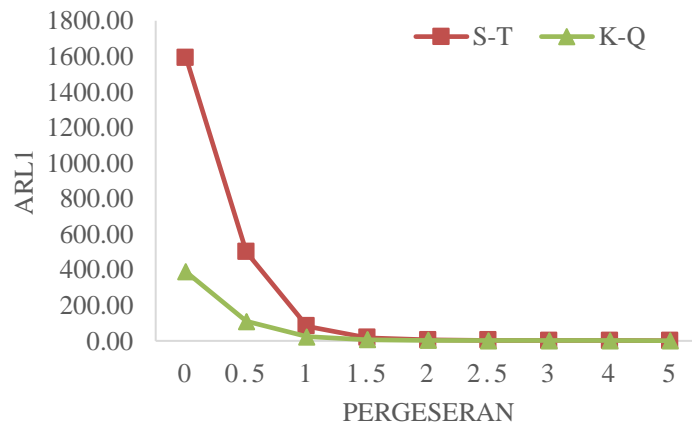
Berdasarkan Tabel 4.3, dapat diketahui bahwa untuk $p = 2$, tanpa ada pergeseran vektor rata-rata ($\delta = 0$), nilai ARL_1 untuk bagan kendali Scholz dan Tosch adalah 1593. Artinya, ketika vektor rata-rata tidak bergeser dari vektor rata-rata target ($\mu_s = \mu_0 = 0$), bagan kendali ini mendeteksi adanya titik yang keluar batas kendali untuk yang pertama kali (RL_1) adalah pada amatan ke-1593. Adapun untuk bagan kendali \tilde{F}_m , nilai RL_1 adalah sebesar 388. Nilai RL_1 bagan kendali V_m untuk $\delta = 0$ jauh lebih kecil dibandingkan dengan nilai RL_1 bagan kendali \tilde{F}_m .

Seperti halnya pada kondisi kedua parameter diketahui, nilai ARL_1 kondisi kedua parameter tidak diketahui juga menurun seiring dengan semakin jauhnya vektor rata-rata bergeser dari vektor rata-rata target. Kondisi ini berlaku bagi kedua bagan kendali, baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m . Sebagai misal: pada p yang sama yaitu 2, dapat dilihat bahwa nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m untuk $\delta = 0,5$ adalah 500. Nilai ARL_1 ini jauh lebih kecil dibandingkan dengan nilai ARL_1 pada saat $\delta = 0$. Kemudian untuk $\delta = 1$, diketahui nilai ARL_1 berdasarkan Tabel 4.3 adalah 82. Selanjutnya, untuk $\delta = 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5$ nilai ARL_1 juga menurun secara berurutan adalah 18, 6, 2, 2, 1, dan 1.

Tabel 4.3. Nilai ARL_1 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m dengan $m = 20$ Ketika Kedua Parameter Tidak Diketahui

δ	$p = 2$		$p = 4$		$p = 8$	
	\tilde{F}_m	V_m	\tilde{F}_m	V_m	\tilde{F}_m	V_m
0	1593.59	388.12	1577.66	384.24	1419.89	345.81
0.5	499.78	109.76	412.78	80.66	256.30	46.80
1	82.42	22.53	56.60	17.31	40.44	12.08
1.5	17.76	6.35	14.58	4.29	10.82	2.66
2	5.50	2.64	3.45	1.62	2.90	1.36
2.5	2.41	1.53	1.39	1.42	1.15	1.06
3	1.46	1.16	1.25	1.03	1.10	1.00
4	1.03	1.01	1.02	1.00	1.00	1.00
5	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tidak berbeda dengan bagan kendali \tilde{F}_m , nilai ARL_1 bagan kendali V_m juga mengalami penurunan seiring dengan semakin jauhnya vektor rata-rata digeser dari vektor rata-rata target. Pada Tabel 4.3 dapat diketahui bahwa, misal: juga pada $p = 2$, nilai ARL_1 bagan kendali V_m untuk $\delta = 0,5$ adalah 110. Selanjutnya, jika besar pergeseran adalah $\delta = 1$, maka nilai ARL_1 bagan kendali V_m adalah 23.



Gambar 4.5. Plot Perbandingan Nilai ARL_1 Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui untuk $p = 2$ dengan $m = 20$

Demikian pula untuk $\delta = 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5$ nilai ARL_1 juga semakin menurun secara berurutan adalah 6, 3, 2, 1, 1 dan 1. Oleh karena itu, dapat disimpulkan

bahwa semakin jauh vektor rata-rata digeser dari vektor rata-rata target, maka semakin kecil nilai ARL_1 . Artinya, baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m , sensitifitas kedua bagan kendali tersebut semakin tinggi seiring dengan semakin besarnya pergeseran.

Pada Tabel 4.3 juga dapat diketahui bahwa nilai ARL_1 bagan kendali V_m jauh lebih kecil dibandingkan dengan nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m . Misal: $p = 2$ dan $\delta = 0$, diketahui nilai ARL_1 bagan kendali V_m adalah 388. Artinya, bagan kendali V_m memberikan informasi adanya indikasi pergeseran vektor rata-rata pada proses yang pertama kali adalah pada titik ke-388. Nilai ARL_1 ini jauh lebih kecil dibandingkan dengan nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m yaitu 1594. Contoh perbandingan lain, misal: $p = 2$ dan $\delta = 1$, nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m adalah 82. Sedangkan nilai ARL_1 bagan kendali V_m adalah 23, 4 kali lebih sedikit dibandingkan dengan nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m . Demikian pula untuk banyak amatan (p) dan besar pergeseran (δ) yang lain. Hal ini dapat dilihat sebagaimana pada Gambar 4.5.

Tabel 4.4. Nilai ARL_1 Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m dengan $m = 50$ Ketika Kedua Parameter Tidak Diketahui

δ	$p = 2$		$p = 4$		$p = 8$	
	\tilde{F}_m	V_m	\tilde{F}_m	V_m	\tilde{F}_m	V_m
0	1633.39	421.80	1599.86	384.24	1472.12	345.81
0.5	564.54	133.23	434.12	102.19	305.04	67.10
1	102.92	42.33	78.97	30.23	59.14	20.88
1.5	23.37	13.28	16.54	7.51	12.82	3.61
2	6.04	3.42	4.98	2.42	3.72	1.93
2.5	2.91	1.97	1.89	1.62	1.52	1.13
3	1.77	1.44	1.43	1.31	1.23	1.00
4	1.03	1.01	1.03	1.00	1.00	1.00
5	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Sama halnya dengan Tabel 4.3, Tabel 4.4 merupakan tabel yang berisi nilai ARL_1 baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui dengan $m = 50$. Sebagaimana yang telah dijelaskan pada tiga tabel sebelumnya, nilai ARL_1 yang diperoleh merupakan nilai ARL_1 hasil simulasi

dengan perulangan 250.000 kali. Lambang p pada Tabel 4.4 juga menunjukkan banyaknya karakteristik yang diamati.

Tabel 4.4 menunjukkan bahwa nilai ARL_1 kedua bagan kendali tersebut mengalami penurunan yang sangat drastis ketika vektor rata-rata proses mengalami pergeseran, yakni misal untuk bagan kendali \tilde{F}_m , pada $p = 2$, diketahui nilai ARL_1 pada $\delta = 0$ adalah 1633, kemudian menurun drastis menjadi 565 ketika $\delta = 0,5$. Begitu pula dengan bagan kendali V_m , nilai ARL_1 mengalami penurunan yang sangat drastis ketika vektor rata-rata proses mengalami pergeseran, misal untuk $p = 2$, diketahui nilai ARL_1 pada $\delta = 0$ adalah 422, kemudian menurun drastis menjadi 133 ketika $\delta = 0,5$.

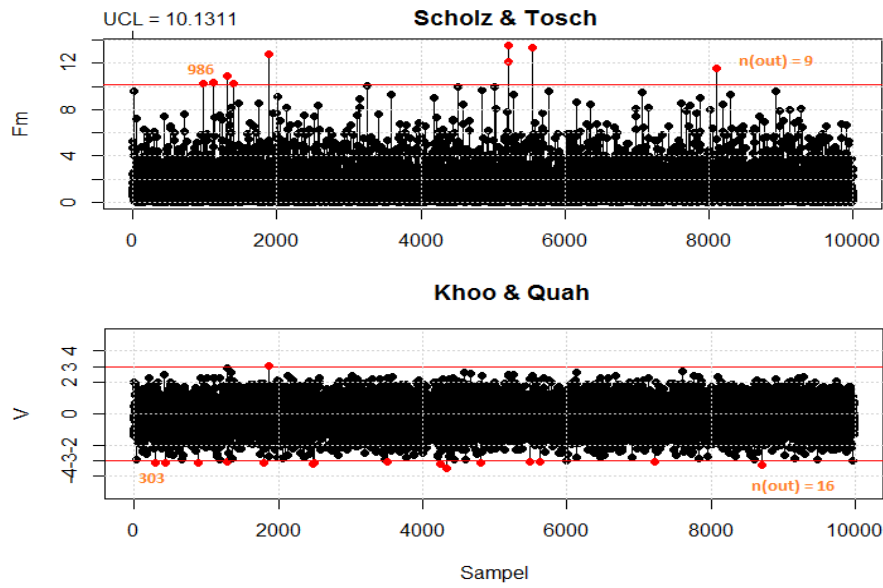
Berdasarkan Tabel 4.4 pula dapat diketahui secara umum bahwa nilai ARL_1 bagi kedua bagan mengalami penurunan yang sangat signifikan ketika vektor rata-rata proses bergeser semakin jauh dari vektor rata-rata yang sebenarnya. Hal tersebut menunjukkan bahwa semakin jauh vektor rata-rata proses bergeser dari vektor rata-rata yang sebenarnya, maka semakin cepat bagan kendali baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m mendeteksi indikasi adanya pergeseran vektor rata-rata.

Namun demikian, secara umum, untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui (kedua parameter tidak diketahui), bagan kendali V_m lebih sensitif dibandingkan dengan bagan kendali \tilde{F}_m . Hal ini dapat dilihat dari Tabel 4.4 yang menunjukkan bahwa nilai ARL_1 bagan kendali V_m lebih kecil dibandingkan dengan nilai ARL_1 bagan kendali \tilde{F}_m .

Gambar 4.6 s.d. Gambar 4.8 merupakan contoh plot hasil simulasi dengan p , m dan δ yang berbeda-beda pada kondisi kedua parameter diketahui. Identik dengan penjelasan pada Gambar 4.2 s.d. Gambar 4.4, garis merah horizontal menunjukkan batas bagan kendali. Bagi bagan kendali \tilde{F}_m , nilai batas kendali atas ditunjukkan sebagaimana nilai UCL pada gambar dengan batas kendali bawah adalah 0. Nilai UCL untuk bagan kendali \tilde{F}_m pada kondisi kedua parameter tidak diketahui adalah berubah-ubah berdasarkan p dan faktor koreksi, d , dengan

$$d = \frac{2(m-1)^2}{3m-4}. \text{ Nilai } UCL = F_{(\alpha=0,0027, p, d-p+1)}.$$

Adapun batas kendali dari bagan kendali V_m pada kondisi kedua parameter diketahui tidak tergantung pada sedikit atau banyaknya p . Batas kendali dari bagan kendali ini adalah konstan yaitu $UCL=3$ dan $LCL=-3$. Pada gambar, titik amatan yang berada di dalam batas kendali (*in-control*) dinyatakan dengan bulatan hitam, sedangkan titik amatan yang berada di luar batas kendali (*out-of-control*) dinyatakan dengan bulatan merah.



Gambar 4.6. Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m

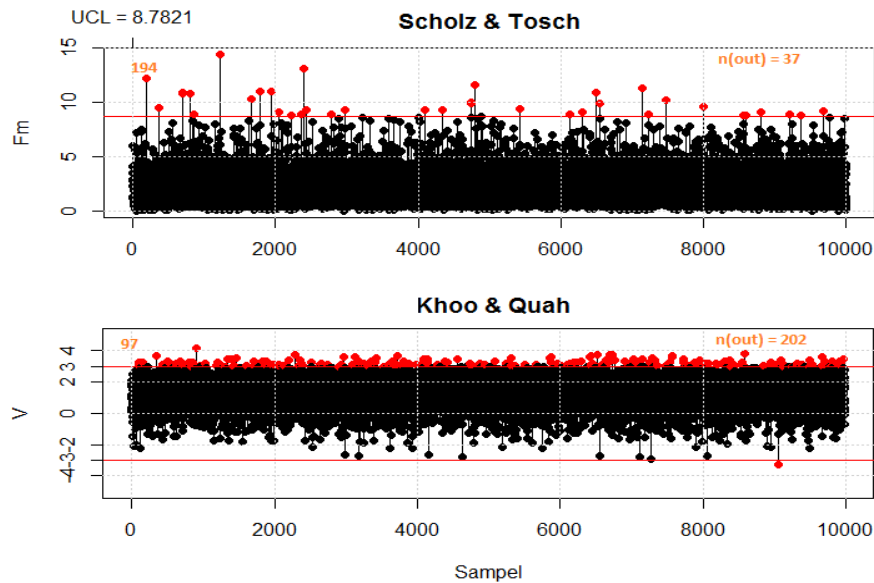
$p = 2, m = 20$ dan $\delta = 0$ Pada Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui

Gambar 4.6 adalah contoh plot baik statistik \tilde{F} pada bagan kendali Scholz dan Tosch maupun statistik V_m pada bagan kendali Khoo dan Quah dari satu kali perulangan dari $N = 10.000$ data. Data tersebut dibangkitkan secara random dengan $\mathbf{x}_f \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + \delta, \mathbf{I}_2)$. Besar pergeseran dari Gambar 4.6 adalah $\delta = 0$, sehingga $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + 0 = \boldsymbol{\mu}_0$ (tidak ada pergeseran vektor rata-rata). Batas kendali atas dari bagan kendali \tilde{F}_m adalah $UCL = F_{(\alpha=0,0027,2,13)} = 10,1311$. Sedangkan batas kendali V_m adalah ± 3 .

Statistik \tilde{F} bagan kendali \tilde{F}_m yang telah dihitung kemudian diplotkan pada bagan kendali. Demikian pula statistik V bagan kendali V_m juga diplotkan ke

bagan kendali. Titik \tilde{F}_m yang berada di dalam batas kendali $UCL = F_{(\alpha=0,0027,2,13)} = 10,1311$ dan titik V_m yang berada di dalam batas kendali ± 3 dinyatakan sebagai titik-titik yang terkendali (*in-control*) dan diberi tanda bulat hitam. Adapun Titik \tilde{F}_m yang berada di luar batas kendali $UCL = F_{(\alpha=0,0027,2,13)} = 10,1311$ dan titik V_m yang berada di luar batas kendali ± 3 dinyatakan sebagai titik-titik yang tidak terkendali (*out-of-control*) dan diberi tanda bulat merah.

Berdasarkan Gambar 4.6 titik pertama yang keluar pertama kali (*run length/RL₁*) dari bagan kendali \tilde{F}_m adalah titik ke-986. Adapun untuk bagan kendali V_m , titik amatan ke-303 merupakan titik pertama kali yang keluar dari batas kendali. Berdasarkan Gambar 4.6 pula, dapat diketahui bahwa banyaknya titik yang keluar atau $n(out)$ untuk bagan kendali \tilde{F}_m dari $N = 10.000$ adalah 9 titik. Sedangkan, untuk bagan kendali V_m , banyaknya titik yang keluar adalah 16 titik.

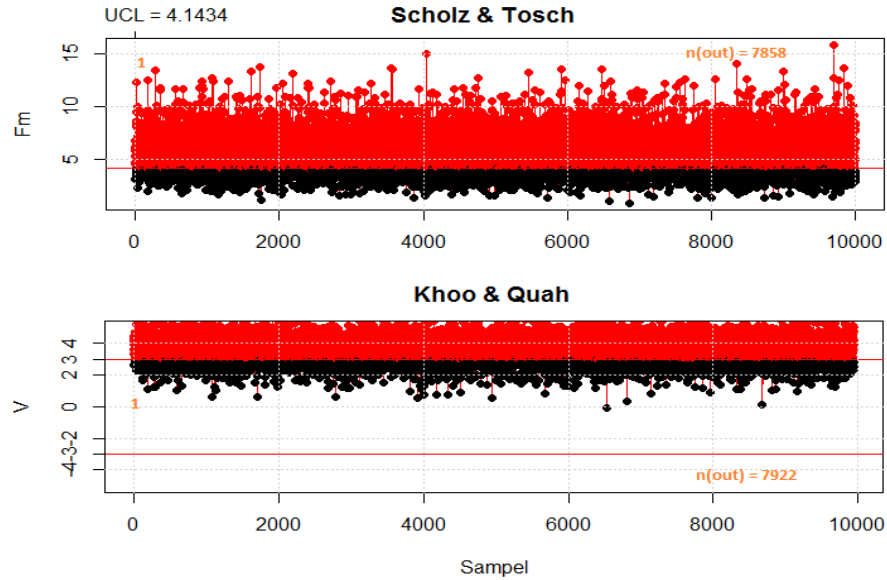


Gambar 4.7. Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m untuk $p = 4, m = 20$ dan $\delta = 1$ Pada Kondisi Kedua Parameter Tidak Diketahui

Contoh lain dari plot satu kali perulangan simulasi pada kondisi kedua parameter tidak diketahui ditunjukkan oleh Gambar 4.7. Data pada Gambar 4.7

dibangkitkan secara random dengan $\mathbf{x}_f \sim N_4(\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + \delta, \mathbf{I}_4)$. Besar pergeseran dari Gambar 4.7 adalah $\delta = 1$, sehingga $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + 1 = \mathbf{1}$. Batas kendali atas dari bagan kendali \tilde{F}_m adalah $UCL = F_{(\alpha=0,0027,4,13)} = 8,7821$. Sedangkan batas kendali V_m adalah ± 3 .

Berdasarkan Gambar 4.7, dapat diketahui bahwa nilai RL_1 untuk bagan kendali \tilde{F}_m adalah 194. Artinya, titik pertama kali yang terdeteksi ketika telah terjadi pergeseran vektor rata-rata sebesar $\mathbf{1}$ adalah titik ke-194. Adapun nilai RL_1 untuk bagan kendali V_m adalah 97. Dengan kata lain, bagan kendali V_m mendeteksi lebih cepat 2 kali dibandingkan bagan kendali \tilde{F}_m .



Gambar 4.8. Contoh Plot Simulasi Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m untuk $p = 8$, $m = 50$ dan $\delta = 2$ Pada Kondisi kedua parameter tidak diketahui

Gambar 4.8 juga merupakan contoh dari plot bagan kendali hasil simulasi. Data pada Gambar 4.8 dibangkitkan secara random dengan $\mathbf{x}_f \sim N_8(\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + \delta, \mathbf{I}_8)$. Besar pergeseran dari Gambar 4.8 adalah $\delta = 2$, sehingga $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_0 + 2 = \mathbf{2}$. Batas kendali atas dari bagan kendali \tilde{F}_m adalah

$UCL = F_{(\alpha=0,0027,8,33)} = 4,1434$. Sedangkan batas kendali V_m adalah sama seperti pada gambar selanjutnya, yakni ± 3 .

Berdasarkan Gambar 4.8 dapat diketahui bahwa nilai RL_1 dari kedua bagan kendali adalah sama yakni 1. Artinya titik pertama kali yang keluar dari batas kendali dari kedua bagan kendali adalah titik amatan ke-1. Dapat diartikan juga bahwa ketika vektor rata-rata digeser menjauh sebesar $\delta = 2$, kedua bagan kendali tersebut dapat dengan segera pada titik pertama mendeteksi bahwa proses memang benar telah terjadi pergeseran. Gambar 4.8 juga menunjukkan bahwa sekitar 80% titik amatan yang keluar dari batas kendali. Artinya, semakin besar pergeseran vektor rata-rata, maka semakin banyak titik amatan yang keluar dari batas kendali.

4.3. Terapan Bagan Kendali Multivariat \tilde{F}_m dan V_m Pada Data Contoh

Sebagai terapan, diberikan 2 contoh data yang diambil dari 2 jurnal. Langkah pertama dari penerapan bagan kendali ini adalah dengan cara melakukan pengujian normalitas multivariat dari data yang digunakan. Ada beberapa uji normalitas multivariat, di antaranya adalah Uji Mardia, Uji Kelas BHEP, Uji Royston dan Uji Henze-Zirkler (Szekely dan Rizzo, 2002; Korkmaz, dkk., 2015). Adapun pada tulisan ini, metode yang digunakan untuk menguji normalitas multivariat data adalah uji Mardia. Berdasarkan perhitungan uji Mardia dinyatakan bahwa kedua data yang digunakan (Sullivan-Jones dan Quesenberry) berdistribusi normal multivariat, sehingga langkah selanjutnya dapat dilakukan (lihat Lampiran 1).

Dikarenakan data contoh yang digunakan tidak diketahui nilai dari kedua parameter, maka persamaan yang digunakan baik bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m adalah persamaan untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui, yakni Persamaan (2.14) untuk bagan kendali \tilde{F}_m dan Persamaan (2.19) untuk bagan kendali V_m .

Untuk data Sullivan dan Jones (2002), setelah menyatakan bahwa data mengikuti distribusi normal multivariat, langkah selanjutnya adalah menghitung statistik \tilde{F}_m pada Persamaan (2.14) untuk bagan kendali \tilde{F}_m . Berbeda dengan

bagan kendali \tilde{F}_m , untuk bagan kendali V_m , sebelum menghitung statistik V_m , tahapan selanjutnya setelah uji normalitas multivariat, adalah mentransformasi data amatan dari bentuk distribusi normal multivariat ke bentuk distribusi normal multivariat standar,

$$\mathbf{x}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \xrightarrow{\text{transformasi}} \mathbf{z}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I}_p).$$

Transformasi ke dalam bentuk normal multivariat standar adalah untuk mendapatkan keseragaman satuan antar karakteristik kualitas yang dimonitor secara simultan dalam satu bagan kendali. Setelah data diubah ke dalam bentuk distribusi normal multivariat standar, maka selanjutnya adalah menghitung stastistik V_m pada Persamaan (2.19). Setelah mendapatkan statistik \tilde{F}_m dan V_m , maka langkah berikutnya adalah membandingkan statistik \tilde{F}_m untuk bagan kendali \tilde{F}_m dengan batas kendali $(UCL) = F_{(\alpha=0,0027, p, d-p+1)} = 7,0057$. Adapun untuk bagan kendali V_m adalah membandingkan statistika V_m dengan batas kendali yakni ± 3 .

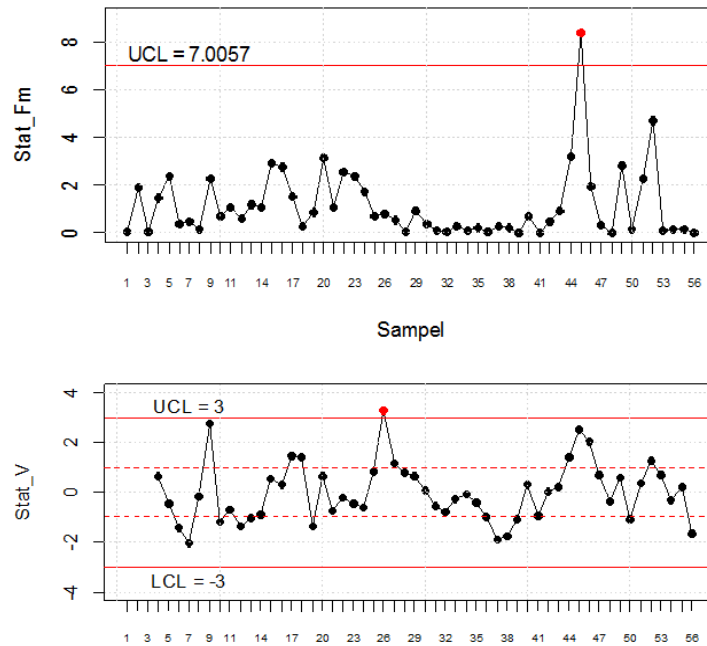
Nilai V_m pada bagan kendali V_m yang terhitung pertama adalah V_4 karena sebagaimana pada Persamaan (2.19) yang menggunakan konsep *successive difference*, $m = p + 2$. Dikarenakan data Sullivan-Jones melibatkan 2 karakteristik kualitas, maka $m = 2 + 2 = 4$, statistik V ke-4, sedangkan 3 vektor data pertama digunakan untuk mengestimasi vektor rata-rata dan matriks kovarians yang kemudian digunakan untuk menghitung statistik V_4 . Jadi, bagan kendali V_m dapat segera dibentuk setelah beberapa amatan diperoleh.

Berbeda halnya dengan bagan kendali \tilde{F}_m , metode *successive difference* hanya digunakan untuk mengestimasi matriks kovarians saja, sedangkan untuk mengestimasi vektor rata-rata melibatkan semua data amatan. Oleh karena itu, bagan kendali \tilde{F}_m tidak dapat digunakan untuk memonitor segera setelah data amatan diperoleh.

Tabel 4.5. Statistik \tilde{F}_m dan V_m Untuk Data Sullivan-Jones

SD ke-	\tilde{F}_m	V_m	SD ke-	\tilde{F}_m	V_m	SD ke-	\tilde{F}_m	V_m
1	0,0284	NA	21	1,0865	-0,755	41	0,0022	-0,939
2	1,8874	NA	22	2,5425	-0,228	42	0,4557	0,007
3	0,0728	NA	23	2,3695	-0,481	43	0,9048	0,212
4	1,4566	0,639	24	1,7366	-0,584	44	3,1696	1,405
5	2,3683	-0,477	25	0,7048	0,820	45	8,3335	2,492
6	0,3603	-1,414	26	0,8128	3,286	46	1,9393	2,017
7	0,5044	-2,036	27	0,5358	1,189	47	0,3175	0,682
8	0,1429	-0,177	28	0,0340	0,787	48	0,0150	-0,362
9	2,2609	2,748	29	0,9058	0,643	49	2,7890	0,613
10	0,6722	-1,174	30	0,3839	0,068	50	0,1576	-1,098
11	1,0862	-0,703	31	0,1169	-0,563	51	2,2613	0,346
12	0,5862	-1,352	32	0,0535	-0,800	52	4,7038	1,257
13	1,2035	-1,035	33	0,2578	-0,264	53	0,1069	0,705
14	1,0842	-0,882	34	0,0837	-0,067	54	0,1437	-0,338
15	2,9116	0,552	35	0,2047	-0,400	55	0,1428	0,208
16	2,7261	0,286	36	0,0311	-0,978	56	0,0146	-1,656
17	1,5045	1,458	37	0,2380	-1,917			
18	0,2595	1,411	38	0,1874	-1,743			
19	0,8664	-1,367	39	0,0044	-1,070			
20	3,0979	0,661	40	0,7075	0,326			

Tabel 4.5 dan Gambar 4.9 menunjukkan bahwa untuk bagan kendali \tilde{F}_m titik amatan ke-45 ($\tilde{F}_{45} = 8,3335 > UCL = 7,0057$) keluar batas kendali, sedangkan untuk bagan kendali V_m , titik amatan ke-26 ($V_{26} = 3,286 > UCL = 3$) keluar batas kendali. Berdasarkan Tabel 4.5 dan Gambar 4.9 pula, dapat dinyatakan bahwa secara terapan (kondisi kedua parameter tidak diketahui/kedua parameter tidak diketahui), bagan kendali V_m lebih cepat mendeteksi adanya titik amatan yang tidak terkendali (titik amatan ke-26) dibandingkan dengan bagan kendali \tilde{F}_m (titik amatan ke-45). Hal ini bersesuaian dengan nilai ARL_1 hasil simulasi untuk kondisi kedua parameter tidak diketahui (lihat Tabel 4.3 dan Tabel 4.4).



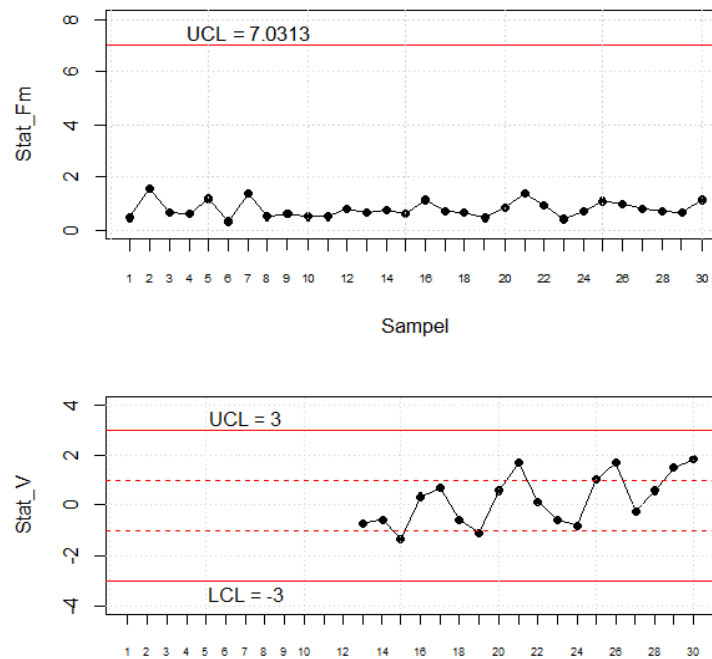
Gambar 4.9. Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk Data Contoh Sullivan dan Jones

Pada umumnya jika terdapat titik yang keluar batas kendali, maka langkah selanjutnya adalah melakukan evaluasi sebab titik tersebut keluar batas kendali dan berbeda nilainya dengan titik amatan yang lain. Apakah disebabkan kesalahan pencatatan, bahan baku, mesin atau sebab yang lain. Jika sebab tersebut ditemukan, maka titik amatan tersebut dapat dihilangkan dan kemudian dihitung kembali batas kendali berdasarkan titik amatan yang tersisa.

Tabel 4.6. Statistik \tilde{F}_m dan V_m Untuk Data Quesenberry

<i>SD ke-</i>	\tilde{F}_m	V_m	<i>SD ke-</i>	\tilde{F}_m	V_m	<i>SD ke-</i>	\tilde{F}_m	V_m
1	0,4849	NA	11	0,5367	NA	21	1,3853	1,6855
2	1,5908	NA	12	0,8317	NA	22	0,9521	0,1775
3	0,6613	NA	13	0,6790	-0,6935	23	0,4476	-0,5362
4	0,6159	NA	14	0,7880	-0,5482	24	0,7379	-0,7970
5	1,1803	NA	15	0,5968	-1,3341	25	1,0963	1,0480
6	0,3501	NA	16	1,1377	0,3506	26	1,0000	1,6774
7	1,3750	NA	17	0,7116	0,7056	27	0,7979	-0,2284
8	0,5110	NA	18	0,6708	-0,5656	28	0,7261	0,5818
9	0,6139	NA	19	0,4812	-1,0861	29	0,6577	1,5036
10	0,5346	NA	20	0,8591	0,5821	30	1,1549	1,8198

Data terapan kedua adalah data Quesenberry. Bagi bagan kendali V_m , tahapan selanjutnya setelah uji normalitas multivariat adalah mentransformasi data amatan dari bentuk distribusi normal multivariat ke bentuk distribusi normal multivariat standar. Kemudian, menghitung statistik \tilde{F}_m dengan menggunakan Persamaan (2.14) untuk bagan kendali \tilde{F}_m . Selanjutnya membandingkan nilai statistik \tilde{F}_m yang telah diperoleh dengan batas kendali: $UCL = F_{(\alpha=0,0027,p,d-p+1)} = 7,0313$. Adapun untuk bagan kendali V_m , langkah berikutnya adalah menghitung statistik V_m pada Persamaan (2.19) dan membandingkannya dengan ± 3 . Nilai V_m pada bagan kendali V_m untuk data Quesenberry yang terhitung pertama adalah V_{13} ($m = p + 2 = 11 + 2 = 13$).



Gambar 4.10. Bagan Kendali \tilde{F}_m dan V_m Untuk Data Contoh Quesenberry

Berdasarkan Tabel 4.6 dan Gambar 4.10 menunjukkan bahwa baik untuk bagan kendali \tilde{F}_m maupun V_m , dari ketiga puluh titik amatan, tidak ada yang keluar batas kendali. Artinya, pada data Quesenberry, proses produksi terkendali secara statistik. Akan tetapi, jika melihat pola *plot* dari kedua bagan kendali

sangatlah berbeda. Pada Gambar 4.11 terlihat bahwa *plot* statistik \tilde{F}_m berada jauh di bawah batas kendali (UCL) dan tidak ada kecenderungan untuk berpola mendekati batas kendali, sedangkan *plot* statistik V_m semakin ke ujung, semakin mendekati batas kendali.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan analisa hasil dan pembahasan, dapat diambil beberapa kesimpulan di antaranya:

1. Untuk konsep pengembangan kedua bagan kendali:
 - a. Pada kondisi kedua parameter diketahui, konsep *successive difference* (SD) yang diterapkan pada bagan kendali \tilde{F}_m hanya digunakan untuk menghitung *estimator* matriks kovarians ($\tilde{\mathbf{S}}_m$), sedangkan untuk *estimator* vektor rata-rata ($\tilde{\mathbf{x}}_m$) melibatkan semua titik amatan, sedangkan pada bagan kendali V_m , konsep SD tidak hanya berlaku untuk menghitung *estimator* matriks kovarians (\mathbf{S}_m), melainkan juga digunakan menghitung untuk *estimator* vektor rata-rata (\mathbf{x}_m).
 - b. Akibat dari penghitungan *estimator* vektor rata-rata ($\tilde{\mathbf{x}}_m$) yang melibatkan semua titik amatan, maka bagan kendali \tilde{F}_m tidak dapat segera terbentuk setelah beberapa data diperoleh, sedangkan bagan kendali V_m dapat segera terbentuk setelah beberapa data diperoleh.
 - c. Pada bagan kendali \tilde{F}_m , data tidak ditransformasi ke dalam bentuk Normal standar sehingga sulit mendefinisikan satuan dari statistik \tilde{F}_m , sedangkan pada bagan kendali V_m , untuk mendapatkan statistik V_m , ada proses transformasi data ke dalam bentuk Normal standar sehingga satuan dari beberapa karakteristik kualitas yang diamati secara simultan diasumsikan sama.
 - d. Batas kendali dari bagan kendali \tilde{F}_m berbeda-beda berdasarkan banyak titik amatan (m) dan karakteristik kualitas (p) yang diamati, sedangkan batas kendali pada bagan kendali V_m tidak dipengaruhi oleh jumlah

titik amatan dan karakteristik kualitas yang diamati, yakni sama ± 3 untuk semua keadaan.

2. Untuk perbandingan kinerja kedua bagan kendali:
 - a. Pada kondisi kedua parameter diketahui, bagan kendali \tilde{F}_m mempunyai sensitifitas lebih tinggi dibandingkan dengan bagan kendali V_m .
 - b. Pada kondisi kedua parameter tidak diketahui, bagan kendali V_m mempunyai sensitifitas lebih tinggi dibandingkan dengan bagan kendali \tilde{F}_m .
 - c. Semakin bertambahnya karakteristik kualitas (p) yang diamati, maka semakin kecil nilai ARL_1 , namun semakin banyak titik amatan yang diamati, maka nilai ARL_1 semakin besar.
 - d. Semakin jauh pergeseran vektor rata-rata proses, maka kedua bagan kendali ini semakin cepat mendeteksi.

5.2. Saran

Adapun saran yang dapat diberikan adalah

1. Pada bagan kendali \tilde{F}_m , konsep SD hanya berlaku pada estimasi matriks kovarians dan tidak untuk estimasi vektor rata-rata. Hal ini menyebabkan bagan kendali tidak dapat segera terbentuk setelah didapat beberapa data amatan. Oleh karena itu, sebagai pengembangan teori, perlu dikembangkan rumusan baru dengan menggunakan konsep SD untuk estimasi kedua parameter, sehingga bagan kendali dapat segera terbentuk setelah didapat beberapa data amatan.
2. Pola pergeseran vektor rata-rata yang disimulasikan pada penelitian ini bersifat simultan, sehingga agar lebih komprehensif, perlu dilakukan pola pergeseran vektor rata-rata secara parsial.
3. Pada penelitian ini yang dikaji adalah hanya bagan kendali pergeseran rata-rata proses, sehingga perlu dikaji lebih lanjut bagan kendali untuk dispersi.

DAFTAR PUSTAKA

- Bersimis, S., S. Psarakis dan J. Panaretos. 2007. Multivariate Statistical Process Control Chart: An Overview. *Quality & Reliability Engineering International*, 23, hal. 517-543.
- Champ, C. W., L. A. Jones-Farmen dan S. E. Rigdon. 2005. Properties of the T^2 Control Chart When Parameters are Estimated. *Technometrics*, 47, hal. 437-445.
- Elam, M. E., dan Case, K. E. 2005. Two-Stage Short-Run Control Charts. *Quality Engineering*, 17, hal. 95-107.
- Fonseca, D. J., M. E. Elam, dan L. Tibbs. 2007. Fuzzy Short-Run Control Charts. *Mathware & Soft Computing*, 14, hal. 81-101.
- Holmes, D. S. dan Mergen, A. E. 1993. Improving the Performance of the T^2 Control Chart. *Quality Engineering*, 5, hal. 619-625.
- Jaupi, L., D. E. Herwindiati, Ph. Durand dan D. Ghorbanzadeh. 2013. Short-Run Multivariate Control Charts for Process Mean and Variability. *Proceeding of the World Congress on Engineering*, London.
- Khoo, M. B. C., dan H. L. Gan. 2005. An Improved Multivariate Short-Run Control Chart Based on The CUSUM Statistic. *Proceeding 1st IMT-GT Regional Conference on Mathematics Statistics and Their Applications*, hal. 287-292.
- Khoo, M. B. C., dan S. H. Quah. 2002. Proposed Short Run Multivariate Control Chart for The Proses Mean. *Quality Engineering*, 14, hal. 603-621.
- Khoo, M. B. C., S. H. Quah, H. C. Low, dan C. K. Ch'Ng. 2005. Short Runs Multivariate Control Chart for Process Dispersion. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 12, hal. 127-147.
- Khoo, M. B. C., dan T. F. Ng. 2005. Enhancing The Performance of A Short Run Multivariate Control Chart For The Process Mean. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 4, hal. 227-239.
- Marques, P. A., Carlos B. C., Paula P., Sousa R., dan Helena G. 2015. Selection of The Most Suitable Statistical Process Control Approach for Short

- Production Runs: A Decision-Model. *International Journal of Information and Education Technology*, 5, hal. 303-310.
- Mason, R. L., & Young, J. C. 2002. *Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*. American Statistical Association and Society for Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia.
- Midi, H., & Shabbak, A. 2011. Robust Multivariate Control Chart to Detect Small Shift in Mean. *Mathematical Problems in Engineering*, hal. 1-19.
- Montgomery, D. C. 2009. *Introduction to Statistical Quality Control*. Edisi ke-5. John Wiley & Sons: New York.
- Pan, Jeh-Nan dan Sheau-Chiann Chen. 2008. Determining Optimal Number of Samples for Constructing Multivariate Control Chart. *International Symposium of Quality Management*, Kaohsiung: Taiwan.
- Petros, M. 2003. *An Investigation of Some Characteristics of Univariate and Multivariate Control Chart*. Thesis Ph.D, Department of Statistics, Athens University of Economics and Business.
- Quesenberry, C. P. 2001. The Multivariate Short-Run Snapshot Q Chart. *Quality Engineering*, 13, hal. 679-683.
- Rogalewicz, Michal. 2012. Some Notes On Multivariate Statistical Process Control. *Management and Production Engineering Review*, 3, hal. 80-86.
- Scholz, F. W. dan T. J. Tosch. 1994. Small Sample Uni- and Multivariate Control Charts for Means. *Proceedings of The American Statistical Association, Quality and Production Section*.
- Seber, G. A. F. 2004. *Multivariate Observation*. John Wiley & Sons: New York.
- Tracy, N. D., J. C. Young, dan R. L. Mason. 1992. Multivariate Control Charts for Individual Observations. *Journal of Quality Technology*, 24, hal. 88-95.
- Sullivan, J. H., dan L. A. Jones. A Self-Starting Control Chart for Multivariate Individual Observations. *Technometrics*, 44, hal. 24-33.
- Zou, C., Z. Wang dan F. Tsung. 2012. A Spatial Rank-Based Multivariate EWMA Control Chart. *Naval Research Logistic*, 59, hal. 91-110.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Uji Normalitas Multivariat

Mardia (1970) dalam Kormaz, dkk. (2015) mengusulkan uji normalitas multivariat berdasarkan perluasan dari skewness ($\hat{\gamma}_{1,p}$) dan kurtosis ($\hat{\gamma}_{2,p}$) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\gamma}_{1,p} = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_{ij}^3 \text{ dan } \hat{\gamma}_{2,p} = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \xi_{ii}^2$$

di mana $\xi_{ij} = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})$.

Uji skewness $\left(\frac{m}{6}\right) \hat{\gamma}_{1,p}$ memiliki pendekatan distribusi Khi-Kuadrat dengan

derajat bebas $\frac{p(p+1)(p+2)}{6} \rightarrow \chi^2_{\frac{p(p+1)(p+2)}{6}}$ dan untuk uji kurtosis adalah

$$\hat{\gamma}_{2,p} \sim N \left[p(p+2), \frac{8p(p+2)}{m} \right].$$

Adapun hipotesis yang melandasi uji Mardia adalah

H_0 : Data berdistribusi normal multivariat

Versus

H_1 : Data tidak berdistribusi normal multivariat.

Dikarenakan pada uji Mardia melibatkan dua statistik uji, yakni uji Skewness dan uji Kurtosis, maka data dinyatakan berdistribusi normal multivariat jika dan hanya jika kedua nilai statistik uji tersebut kurang dari nilai statistik tabel (nilai-p lebih besar dari $\alpha = 0,05$). Atau dengan kata lain, keputusan untuk terima H_0 (data berdistribusi normal multivariat) jika:

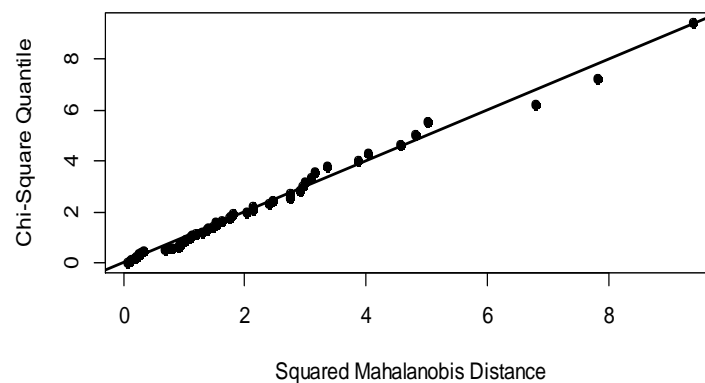
1. $\left(\frac{m}{6}\right) \hat{\gamma}_{1,p} < \chi^2_{\left(\alpha, \frac{p(p+1)(p+2)}{6}\right)}$ dan
2. $\hat{\gamma}_{2,p} < Z_{\alpha}$.

I. Uji Normalitas Multivariat Data Sullivan-Jones (2002)

Dengan menggunakan paket program R, diperoleh hasil uji normalitas multivariat sebagai berikut:

```
-----  
Mardia's Multivariate Normality Test  
-----  
data : data_holmes  
g1p      : 0.2843012  
chi.skew : 2.653478  
p.value.skew : 0.6173795  
g2p      : 7.691826  
z.kurtosis : -0.2882704  
p.value.kurt : 0.7731398  
chi.small.skew : 2.897288  
p.value.small : 0.5751585  
Result   : Data are multivariate normal.  
-----
```

Keputusan dan kesimpulan ini juga didukung oleh plot Q-Q pada Gambar 4.13 di mana titik-titik Q-Q berada pada sekitar garis.

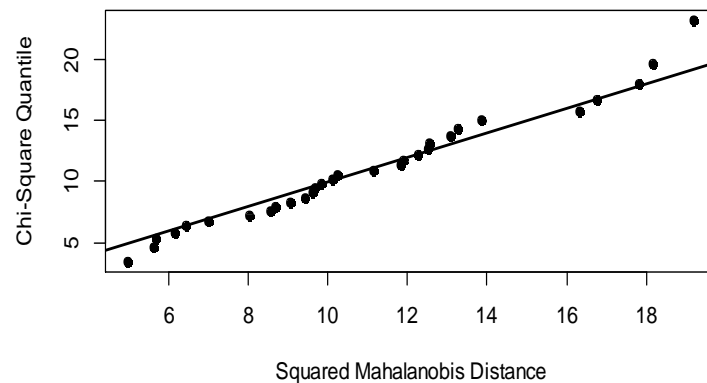


Gambar 1. Plot Q-Q Khi-Kuadrat Untuk Uji Normalitas Multivariat Data Holmes-Mergen (1993) dalam Sullivan-Jones (2002)

II. Uji Normalitas Multivariat Data Quesenberry (2001)

Sama halnya dengan data Holmes-Mergen (1993), langkah pertama yang dilakukan adalah dengan menguji data Quesenberry apakah berdistribusi normal multivariat ataukah tidak. Uji yang digunakan adalah Uji Mardia dengan hasil perhitungan sebagai berikut:

```
Mardia's Multivariate Normality Test
-----
data : data_ques
g1p      : 50.25347
chi.skew : 251.2674
p.value.skew : 0.9315471
g2p      : 135.5729
z.kurtosis : -1.202729
p.value.kurt : 0.229081
chi.small.skew : 280.9251
p.value.small : 0.5735964
Result   : Data are multivariate normal.
-----
```



Gambar 2. Plot Q-Q Khi-Kuadrat Untuk Uji Normalitas Multivariat Data Quesenberry (2001)

Lampiran 2. Program Simulasi Nilai ARL_1

#Short-Run Pengamatan Individu oleh Scholz dan Tosch (1994)

```
cl_Fm <- function(p,m,alpha=0.0027,kondisi='uu'){
#-----
#Fungsi cl_Fm
#Batas kendali
#input      :
#  p          :      variat/banyaknya variabel
#  m          :      ukuran sampel
#  alpha      :      taraf nyata (default 0.0027)
#  kondisi    :      informasi parameter ('kk' atau 'uu')
#-----
  if(kondisi=='uu'){
    d <- 2*(m-1)^2/(3*m-4)
    ucl <- qf(1-alpha,p,d-p+1)
  }else if(kondisi=='kk'){
    ucl <- qchisq(1-alpha,df=p)
  }
  return(ucl)
}

estpar_suc <- function(sdata){
#-----
#Fungsi estpar_suc
#Estimasi parameter suksesif
#input      :
#  sdata     :      data sampel mxp
#-----
  m <- nrow(sdata)
  mu <- colMeans(sdata)
  sucdata <- sdata[2:m,]-sdata[1:(m-1),]
  S <- t(sucdata)%*%sucdata/(2*(m-1))
  output <- list(mum=mu,Sm=S)
  return(output)
}

calc_Fm <- function(sdata,mu,S,kondisi='uu'){
#-----
#Fungsi calc_Fm
#Menghitung statistik Fm (kondisi uu)
#input      :
#  sdata     :      data sampel mxp
#  mu        :      vektor rata-rata
#  S         :      matriks S suksesif
#  kondisi    :      informasi parameter ('kk' atau 'uu')
#-----
  if(kondisi=='uu'){
    m <- nrow(sdata)
    p <- ncol(sdata)
    d <- 2*(m-1)^2/(3*m-4)
    Fm <- (d-p+1)/(d*p)*(m/(m+1))*mahalanobis(sdata,mu,S)
  }else if(kondisi=='kk'){
```

```

        Fm <- mahalanobis(sdata,mu,S) #T2
    }
    return(Fm)
}

```

#Short Run Pengamatan Individu oleh Khoo dan Quah (2002)

```

Vstat_kk <- function(sdata,mu,S){
#-----
#Fungsi Vstat_kk
#Menghitung statistik V untuk kondisi known-known (kk)
#input      :
#   sdata :      data sampel mxp
#   mu    :      vektor rata-rata
#   S     :      matriks kovarian
#-----
    p <- ncol(sdata)
    T2 <- mahalanobis(sdata,mu,S)
    khi2_prob <- pchisq(T2,df=p)
    Vstat <- qnorm(khi2_prob,mean=0,sd=1)
    output <- list(Vstat=Vstat,T2=T2,khi2prob=khi2_prob)
    return(output)
}

```

```

Vstat_uu <- function(sdata0=NULL,sdata){
#-----
#Fungsi Vstat_uu
#Menghitung statistik V untuk kondisi unknown-unknown (uu)
#input      :
#   sdata0   :      data sampel terkontrol(base) mxp {bersifat
opsional}
#   sdata    :      data sampel mxp
#-----
    m <- nrow(sdata)
    p <- ncol(sdata)
    if(is.null(sdata0)){
        T2 <- F_prob <- rep(NA,m)
        for(i in (p+2):m){
            mum1 <- colMeans(sdata[1:(i-1),])
            Sm1 <- cov(sdata[1:(i-1),])
            correctf <- (i-1)*(i-p-1)/(i*p*(i-2))
            df2 <- i-p-1
            T2[i] <- mahalanobis(sdata[i,],mum1,Sm1)
            F_prob[i] <- pf(correctf*T2[i],df1=p,df2=df2)
        }
    }else{
        m0 <- nrow(sdata0)
        #ext_sdata <- rbind(sdata0,sdata)
        #T2 <- F_prob <- rep(NA,m)
        mum1 <- colMeans(sdata0)
        Sm1 <- cov(sdata0)
        correctf <- (m0-1)*(m0-p-1)/(m0*p*(m0-2))
        df2 <- m0-p-1
        T2 <- mahalanobis(sdata,mum1,Sm1)
        F_prob <- pf(correctf*T2,df1=p,df2=df2)
    }
}

```

```

Vstat <- qnorm(F_prob,mean=0,sd=1)
output <- list(Vstat=Vstat,T2=T2,F_prob=F_prob)
return(output)
}

test_Vstat <- function(Vstat,p,kondisi=1){
#-----
#Fungsi test_Vstat
#Mendeteksi pengamatan yang pertama keluar dengan uji 1 of 1
#input      :
#  Vstat    : statistik V
#  p        : variat/banyaknya variabel
#  kondisi  : kondisi parameter yang diketahui
#            (mu,SIGMA)
#            1      = Known-known (kk)
#            2      = Unknown-unknown (uu)
#-----
  absVstat <- abs(as.vector(na.omit(Vstat)))
  n <- length(absVstat)

  #uji 1 of 1
  out11 <- which(absVstat>3)
  nout11 <- length(out11)
  if(nout11==0){out11 <- NA}
  locout11 <- out11
  rl11 <- out11[1]

  #kondisi kk
  if(kondisi==1){
    cond <- 'Known-known'
    rl11 <- rl11
  }

  #kondisi uu
  else if(kondisi==2){
    cond <- 'Unknown-Unknown'
    rl11 <- rl11+(p+1)
  }

  output <-
list(kondisi=cond,nout=nout11,rl=rl11,locout=locout11)
  return(output)
}

#Simulasi arl
=====
library(RDCOMClient)
#membutuhkan source toolsr2excel

samp_incontr <- function(N,m,p,mu0,S0,alpha=0.0027){
#-----
#Fungsi samp_incontr
#sampling in control
#input      :

```

```

#      N          :      ukuran data yang dibangkitkan (default
1000)
#      m          :      ukuran sampel (in control training)
#      p          :      variat/banyaknya variabel
#      mu0        :      vektor rata-rata untuk bangkitkan data
#      S0         :      matriks kovarian untuk bangkitkan data
#      alpha      :      taraf nyata (default 0.0027)
#output          :
#      $p          :      variat/banyaknya variabel
#      $m          :      ukuran sampel (in control
training)
#      $alpha      :      taraf nyata
#      $mu0        :      parameter bangkitan (vektor rata-
rata)
#      $S0         :      parameter bangkitan (matriks
kovarian)
#      $scholztosch
#      $data0      :      sampel yang terkontrol
#      $mum        :      mu suksesif (jika kk mum=mu0)
#      $Sm         :      S suksesif (jika kk Sm=S0)
#      $Fm         :      statistik Fm (jika kondisi kk
-> T2)
#      $ucl        :      batas kendali atas
#      $khooquah
#      $data0      :      sampel yang terkontrol
#      $Vstat      :      statistik V
#-----

```

```

#bangkitkan data awal -----

```

```

data0 <- MASS::mvrnorm(N,mu0,S0)

```

```

#sampling terkontrol -----

```

```

#sampling yang terkontrol Scholz&Tosch

```

```

#ucl scholz-tosch

```

```

F_cl <- cl_Fm(p,m,alpha,kondisi='uu')

```

```

repeat{
  sdata0.st <- data0[sample(1:N,m),]
  #estimasi parameter suksesif
  par_suc <- estpar_suc(sdata0.st)
  mum <- par_suc$mum
  Sm <- par_suc$Sm
  Fm0 <- calc_Fm(sdata0.st,mu0,S0,kondisi='uu')
  incontr <- all(Fm0<F_cl)
  if(incontr){break}
}

```

```

#sampling yang terkontrol Khoo&Quah

```

```

repeat{
  sdata0.kq <- data0[sample(1:N,m),]
  tmpkq <- Vstat_uu(sdata=sdata0.kq)
  Vstat <- tmpkq$Vstat
  incontr <- all(abs(na.omit(Vstat))<3)
  if(incontr){break}
}

```

```

#output

```

```

st <- list(data0=sdata0.st,mum=mum,Sm=Sm,Fm=Fm0,ucl=F_cl)

```

```

kq <- list(data0=sdata0.kq,V=Vstat)

```

```

        output <-
list(p=p,m=m,alpha=alpha,mu0=mu0,S0=S0,scholztoch=st,khooquah=kq)
        return(output)
}

```

```

gensim <- function(N,m,p,shift,alpha,samplin=NULL){
#-----
#Fungsi gensim
#membuat 1 x bangkitan (simulasi)
#input      :
#   N        :   ukuran data yang dibangkitan (default
1000)
#   shift    :   pergeseran vektor rata-rata (dapat berisi lebih
dari satu)
#   samplin   :   objek sampling in control (dari fungsi
samp_incontr)
#output     :
#   $datashift      :   data setelah digeser
#   $scholztoch     :
#   $ucl            :   batas kendali atas
#   $Fm             :   statistik Fm (jika kondisi kk
-> T2)
#   $nout          :   banyaknya amatan yang tidak
terkontrol
#   $locout         :   amatan yang tidak terkontrol
#   $khooquah       :
#   $Vstat          :   statistik V
#   $nout          :   banyaknya amatan yang tidak
terkontrol
#   $locout         :   amatan yang tidak terkontrol
#-----
#parameter untuk bangkitkan data
mu0 <- rep(0,p)
S0 <- diag(1,p)

#jika samplin tidak diinput -> kondisi 'kk'
if(is.null(samplin)){
    kondisi <- 'kk'
    mum <- mu0 #parameter suksesif = parameter untuk
bangkitkan data
    Sm <- S0
    ucl.st <- cl_Fm(p,m,alpha,kondisi) #ucl khi2
}
else{
    kondisi <- 'uu'
    ucl.st <- samplin$scholztoch$ucl #ucl F
    mum <- samplin$scholztoch$mum
    Sm <- samplin$scholztoch$Sm
    sdata0.kq <- samplin$khooquah$data0
}

repeat{
    #bangkitkan data yang digeser -----
    mud <- mu0+shift
    data1 <- MASS::mvrnorm(N,mud,S0)

    #Menerapkan Scholz&Tosch - Khoo&Quah -----

```

```

#terapkan Scholz&Tosch
Fm <- calc_Fm(data1,mum,Sm,kondisi)
tmpout.st <- which(Fm>ucl.st)
tmpnout.st <- length(tmpout.st)

#terapkan Khoo&Quah
#kondisi kk
if(kondisi=='kk'){
  tmpkq <- Vstat_kk(sdata=data1,mu=mu0,S=S0)
}else if(kondisi=='uu'){
  #kondisi uu
  tmpkq <- Vstat_uu(sdata0=sdata0.kq,sdata=data1)
}
tmpVstat <- tmpkq$Vstat[-(1:m)]
tmpuji.kq <- test_Vstat(tmpVstat,p,kondisi=1)
tmpnout.kq <- tmpuji.kq$nout

#rekam hasil st dn kq ke dalam list -----
st <-
list(ucl=ucl.st,Fm=Fm,nout=tmpnout.st,locout=tmpout.st)
kq <-
list(Vstat=tmpVstat,nout=tmpnout.kq,locout=tmpuji.kq$locout)

#cek masing-masing uji apakah ada yang terdeteksi ----
-----

tmpnout <- c(tmpnout.st,tmpnout.kq)
ceknout <- any(tmpnout==0)
if(!ceknout){
  break
}
}
#output -----
output <- list(datashift=data1,scholztsch=st,khooquah=kq)
return(output)
}

sim_arl <- function(N=1000,p,m,shift,alpha=0.0027,loop=5000,
  burnin=100,kondisi='uu'){
#-----
#Fungsi sim_arl
#Simulasi arl Scholz&Tosch - Khoo&Quah
#input :
# N : ukuran data yang dibangkitkan (default
1000)
# p : variat/banyaknya variabel
# m : ukuran sampel (in control training)
# shift : pergeseran vektor rata-rata (dapat berisi lebih
dari satu)
# alpha : taraf nyata (default 0.0027)
# loop : perulangan simulasi (default 5000)
# kondisi :
# 'kk' -> Known-known
# 'uu' -> Unknown-unknown (default)
#-----
#pengaturan direktori penyimpanan output
setwd(choose.dir())
dir <- getwd()

```

```

#identifikasi input
nshift <- length(shift)

#parameter untuk bangkitkan data awal
mu0 <- rep(0,p)
S0 <- diag(1,p)

if(kondisi=='uu'){
  #sampling in control
  samplin <- samp_incontr(N,m,p,mu0,S0,alpha)
  # (N,m,p,mu0,S0,alpha=0.0027)
}

#inisialisasi rekam dan penyimpanan output simulasi
namcol <- c('p','m','ucl-
ScholzTosch','nout.ScholzTosch','rl.ScholzTosch',
           'ucl-
KhooQuah','nout.KhooQuah','rl.KhooQuah')
namrow <- matrix(c(paste0(1:loop),'rata-rata'),ncol=1);
colnames(namrow) <- 'Ket.'
rowrata <- matrix(paste0('shift-',shift),ncol=1);
colnames(rowrata) <- 'Ket.'
recrata <- matrix(NA,nshift,8)
recwaktu <- 0

#excel
xls <- COMCreate("Excel.Application")
#xls[["Visible"]] <- TRUE
wb <- xls[["Workbooks"]]$Add(1)
namafile <- paste0('sim-(p=',p,',m=',m,')-',kondisi,'-
Koo&Quah-Scholz&Tosch.xlsx')
lchar <- nchar(dir)
if(lchar==3){
  namafile <- paste0(gsub('/', '\\\\',dir),namafile)
}else{
  namafile <- paste(dir,namafile,sep='\\')
  namafile <- gsub('/', '\\\\', namafile)
}

#perulangan shift
for(i in 1:nshift){
  mulai <- Sys.time()
  cat('\n\nProses simulasi shift',shift[i],'\n\n')
  nout.st <- rl.st <- nout.kq <- rl.kq <- rep(NA,loop)

  #perulangan simulasi
  k <- 1
  for(j in 1:(loop+burnin)){
    cat(j, ' ')
    if(kondisi=='uu'){
      sim <-
gensim(N,m,p,shift[i],alpha,samplin)
    }else{
      sim <-
gensim(N,m,p,shift[i],alpha,samplin=NULL)
    }
    #sim <- gensim(N,shift[i],samplin)
    st <- sim$scholztoch

```

```

        kq <- sim$khooquah

        #rekam perulangan
        if(j>burnin){
            nout.st[k] <- st$nout
            rl.st[k] <- st$locout[1]
            nout.kq[k] <- kq$nout
            rl.kq[k] <- kq$locout[1]
            k <- k+1
        }

    }
    akhir <- Sys.time()
    recwaktu[i] <- akhir-mulai

    #rata-rata
    tmpsim <-
cbind(p,m,st$ucl,nout.st,rl.st,3,nout.kq,rl.kq)
    tmpratsim <- colMeans(tmpsim)
    recrata[i,] <- tmpratsim
    tmpsim <- rbind(tmpsim,tmpratsim)
    colnames(tmpsim) <- namcol

    #export ke sheet excel
    sh <- wb[["Worksheets"]]$Add()
    sh[["Name"]] <- paste0('shift-',shift[i])
    exportDataFrame(df=data.frame(namrow,tmpsim), at =
sh$Range("A1"))
    }
    #simpan output ringkasan rat-rata simulasi ke excel
    colnames(recrata) <- namcol
    #export ke sheet excel
    sh <- wb[["Worksheets"]]$Add()
    sh[["Name"]] <- 'ringkasan-rata2'
    exportDataFrame(df=data.frame(rowrata,recrata), at =
sh$Range("A1"))

    #simpan catatan waktu
    waktu <- cbind(shift,recwaktu)
    waktu <- rbind(waktu,colSums(waktu))
    colnames(waktu) <- c('shift','waktu')
    namwaktu <- matrix(c(paste0(1:nshift),'total'),ncol=1);
colnames(namwaktu) <- 'Ket.'
    #export ke sheet excel
    sh <- wb[["Worksheets"]]$Add()
    sh[["Name"]] <- 'waktu-proses'
    exportDataFrame(df=data.frame(namwaktu,waktu), at =
sh$Range("A1"))
    xls$Worksheets("Sheet1")$Delete()
    wb$SaveAs(namafilename)
    wb$Close(namafilename)
    xls$Quit()
    #output berupa file excel berisi hasil simulasi
}

```


Lampiran 3. Program Terapan

```
##Analisis Terapan - Real
#membutuhkan package
#      MVN

##Holmes Holmes-Mergen 1993 =====
data_holmes <- read.table(choose.files()) #pilih sesuai lokasi
files
data_holmes <- as.matrix(data_holmes[,-3]) #ambil karakteristik 1
dan 2

#normalitas multivariat (Mardia test)
#-----
holmes_nortest <- MVN::mardiaTest(data_holmes,qqplot=TRUE)
holmes_nortest

#Terapkan Bagan Kendali Tosch
#-----
alpha <- 0.0027
p <- ncol(data_holmes)
m <- nrow(data_holmes)
UCL <- cl_Fm(p,m,alpha) #batas kendali
UCL
estim_par <- estpar_suc(data_holmes)
mum <- estim_par$mum #mu
mum
Sm <- estim_par$Sm #S suksesif
Sm
Fm <- calc_Fm (data_holmes,mum,Sm) #statistik Fm
Fm

#plotting
par(mfrow=c(2,1))
plot(Fm,type='o',pch=16,col=ifelse(Fm >
UCL,'red','black'),xaxt='n',
      ylim=c(0,max(Fm)+1),main='Holmes: Scholz &
Tosch',xlab='Sampel',ylab='Fm')
abline(h=UCL,col='red')
grid()
axis(3,0,paste0('UCL = ',round(UCL,4)))
axis(1,at=1:m,labels=paste0(1:m),cex.axis = .6)

#Terapkan Khoo-Quah
#-----
data_holmes_z <- scale(data_holmes) #transformasi z
est_Vstat <- Vstat_uu(sdata=data_holmes_z)
T2 <- est_Vstat$T2
F_prob <- est_Vstat$F_prob
Vstat <- est_Vstat$Vstat
Vstat

#plotting
plot((p+2):m,Vstat[-c(1:(p+1))],type='o',pch=16,
      col=ifelse(abs(Vstat[-c(1:(p+1))]) >
3,'red','black'),xaxt='n',
      xlim=c(1,m),ylim=c(-4,4),main='Holmes: Khoo-Quah',
```

```

        xlab='Sampel',ylab='V')
abline(h=c(-3,3),col='red')
abline(h=c(-1,1),lty=2,col='red')
grid()
axis(2,at=c(-3,3),labels=c(-3,3))
axis(1,at=1:m,labels=paste0(1:m),cex.axis = .6)

##Quessenberry 2001 =====
data_ques <- read.table(choose.files()) #pilih sesuai lokasi files
data_ques <- as.matrix(data_ques)

#normalitas multivariat (Mardia test)
#-----
ques_nortest <- MVN::mardiaTest(data_ques,qqplot=TRUE)
ques_nortest

#Terapkan Bagan Kendali Tosch
#-----
alpha <- 0.0027
p <- ncol(data_ques)
m <- nrow(data_ques)
UCL <- cl_Fm(p,m,alpha) #batas kendali
UCL
estim_par <- estpar_suc(data_ques)
mum <- estim_par$mum #mu
mum
Sm <- estim_par$Sm #S suksesif
Sm
Fm <- calc_Fm (data_ques,mum,Sm) #statistik Fm
Fm

#plotting
par(mfrow=c(2,1))
plot(Fm,type='o',pch=16,col=ifelse(Fm >
UCL, 'red', 'black'),xaxt='n',
      ylim=c(0,UCL+1),main='Quessenberry: Scholz &
Tosch',xlab='Sampel',ylab='Fm')
abline(h=UCL,col='red')
grid()
axis(3,0,paste0('UCL = ',round(UCL,4)))
axis(1,at=1:m,labels=paste0(1:m),cex.axis = .6)

#Terapkan Khoo-Quah
#-----
data_ques_z <- scale(data_ques)
est_Vstat <- Vstat_uu(sdata=data_ques_z)
T2 <- est_Vstat$T2
F_prob <- est_Vstat$F_prob
Vstat <- est_Vstat$Vstat
Vstat

#plotting
plot((p+2):m,Vstat[-c(1:(p+1))],type='o',pch=16,

```

```

col=ifelse(abs(Vstat[-c(1:(p+1))]) >
3, 'red', 'black'), xaxt='n',
xlim=c(1,m), ylim=c(-4,4), main='Quessenberry: Khoo-
Quah',
xlab='Sampel', ylab='V')
abline(h=c(-3,3), col='red')
abline(h=c(-1,1), lty=2, col='red')
grid()
axis(2, at=c(-3,3), labels=c(-3,3))
axis(1, at=1:m, labels=paste0(1:m), cex.axis = .6)

```

BIOGRAFI PENULIS



Darmanto adalah anak ketujuh pasangan Mu'at dan Jaemah. Penulis, sebagai anak bungsu, lahir pada 30 Mei 1983 dan besar di kota Banyuwangi. Tamat dari SDN Kepatihan III, Penulis melanjutkan pendidikan di SMPN 2 kemudian memilih SMUN 1 Glagah sebagai tempat meneruskan pendidikan di tingkat menengah atas.

Pada tahun 2001, Penulis resmi menjadi mahasiswa Universitas Brawijaya Program Studi Statistika. Tepat setahun pasca wisuda program sarjana tahun 2005, Penulis dipercaya Universitas Brawijaya untuk dapat mengabdikan di almamater sebagai Staf Pengajar pada program studi yang sama, Statistika. Tahun-tahun sebagai Staf Pengajar, Penulis disibukkan dengan penelitian, pengajaran, dan pengabdian kepada masyarakat hingga pada tahun 2012 semester genap, Penulis melanjutkan studi jenjang Magister di Program Pasca Sarjana Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS). Untuk keperluan korespondensi, Penulis dapat dihubungi melalui media sosial, di antaranya: Facebook (Darmanto Muat), Instagram (@darmantomuat), e-mail (darman_stat@ub.ac.id; darmanto.nina@gmail.com).